TEMA 1: SECUENCIAS Y SISTEMAS

SECUENCIAS DETERMINISTAS BÁSICAS

* Impulso unidad
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

* Escalon unidad
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases} = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

* Signo
$$\text{sign}[n] = \begin{cases} 1 & n>0 \\ 0 & n=0 \\ -1 & n<0 \end{cases}$$

* Pulso de long. L
$$p_L[n] = \begin{cases} 1 & 0\leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{para otro } n \end{cases}$$

- Cualquier función puede expresarse como suma de deltas $\Rightarrow \boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] = x[n] * \delta[n]}$

* Exponencial

$$\boxed{x[n] = C z^n = |C||z|^n e^{j(\omega n+\theta)}}$$

Exp. compleja $\boxed{x[n] = C e^{j2\pi f_0 n}}$

ciclos $= \frac{\text{conv. sign}}{2} \Leftrightarrow f_0 \in [0, \frac{1}{2}]$

$\boxed{\text{Periódica} \Leftrightarrow f_0 \in \mathbb{Q}}$ $\boxed{f_0 = \frac{k}{P}}$ $k \leftarrow$ ciclos/periodo, $P \leftarrow$ muestras/periodo

SISTEMAS

* Linealidad: $T\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 T\{x_1[n]\} + a_2 T\{x_2[n]\}$
* Invarianza (No depende del origen de tiempo): $T\{x[n-m]\} = y[n-m]$
* Causalidad: $y[n]$ solo depende de valores pasados y presente de $x[n]$
* Estabilidad: Si $|x[n]| < \infty \;\; \forall n \Rightarrow |y[n]| < \infty \;\; \forall n$

SISTEMAS L.I.

* Ec. de convolucion $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$

* Convolución gráfica:
  a/ Referir las secuencias a la variable k.
  b/ Reflejar una de las secuencias $h[k] \rightarrow h[-k]$
  c/ Retardar n posiciones $h[n] \rightarrow h[n-k]$
  d/ Hayar el producto $x[k]\,h[n-k]$ y sumar sobre todo k
  e/ Repetir el proceso variando n.

- La convolución de dos sec. de long. N y M da una sec. de long $N+M-1$

* Propiedades de la convolución

Conmutativa, Asociativa, Distributiva respecto +, Elem. neutro ($\delta[n]$)

* Sistemas habituales

Acumulador : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ | Promediador: $y[n] = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[n-k]$

* Respuesta impulsional de un sistema L.I.

Si $y[n] = T\{x[n]\} \Rightarrow h[n] = T\{\delta[n]\}$

- Propiedades de los sistemas a partir de su $h[n]$

  * Estabilidad : $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

  * Causalidad : $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$

- FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

- La respuesta de un sistema L.I. a una exp. compleja es la misma exp. por una constante.

$$y[n] = z^n * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{n-k} h[k] = z^n \sum_{-\infty}^{\infty} z^{-k} h[k] = z^n H(z)$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega k}}$$ Respuesta frecuencial.

- ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

$$\boxed{\sum_{k=0}^{P} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{Q} b_k\, x[n-k]}$$

La solución es del tipo $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$ con

$$\boxed{\sum_{k=0}^{P} a_k\, y_h[n-k] = 0}$$

$y_p[n]$: se ensaya una sol. del mismo tipo que $x[n]$

$$\boxed{y_h[n] = A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n + \dots + A_p \lambda_p^n}$$

La sol. homogenea a una E.D.F de orden P será de este tipo.

Ejemplo: $y[n] = x[n] + a y[n-1] \qquad x[n] = b^n$

$$y[n] = \underbrace{\frac{b}{b-a}\, b^n}_{y_p} + \underbrace{A a^n}_{y_h} \qquad \forall A \in \mathbb{C}$$

TEMA 2: LA RESPUESTA FRECUENCIAL

LA TRANSFORMADA DE FOURIER

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}} \quad \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega}$$

¡¡ 2π periódica !! — un periodo cualquiera

***Propiedades de la TF**

$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$

$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$

$x[n] = x[-n]$ par $\xleftrightarrow{F}$ $X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$ par

$x[n] = -x[-n]$ impar $\xleftrightarrow{F}$ $X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega})$ impar

$x[n] = x^*[n]$ real $\xleftrightarrow{F}$ $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ hermit.

$x[n] = -x^*[n]$ imag $\xleftrightarrow{F}$ $X(e^{j\omega}) = -X^*(e^{-j\omega})$

$x[n]$ real y par $\xleftrightarrow{F}$ $X(e^{j\omega})$ real y par

$x[n]$ imag. e impar $\xleftrightarrow{F}$ $X(e^{j\omega})$ real e impar

***Transformada de secuencias básicas**

$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi i)$

$u[n] \xleftrightarrow{F} \pi \sum_{i=-\infty} \delta(\omega - 2\pi i) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$

$\delta[n-m] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega m}$

$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi i)$

$p_L[n] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega\frac{L-1}{2}} \frac{\sin\frac{L}{2}\omega}{\sin \omega/2}$

$a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

$$t[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n+rN] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \xleftrightarrow{F} \frac{2\pi}{N} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} i\right)$$

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

Si $x[n] = 0 \quad n \notin [0, N-1]$
sino la DFT_N realiza un enventanado implícito con $p_N[n]$

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}} \qquad k = 0, \dots, N-1$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}} \qquad n = 0, \dots, N-1$$

- Eliminando la restricción $n = 0, \dots, N-1 \Rightarrow DFT_N^{-1}\{X[k]\} = \tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]$

Si $x[n] = 0 \quad n \notin [0, N-1] \Rightarrow \underbrace{\boxed{X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}}}_{k=0,\dots,N-1} \ \underbrace{\boxed{x[n] = DFT_N^{-1}\left\{ X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \right\}}}_{n=0,\dots,N-1}$

Sino $\quad X[k] = X(e^{j\omega}) \; 2\pi \; P_N(e^{j\omega})\big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$

$$DFT_N^{-1}\left\{ X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \right\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] \qquad n = 0, \dots, N-1$$

TEOREMAS DE LA TF Y LA DFT

* Linealidad: La cumplen tanto la TF como la DFT

* Dualidad: $X[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} N\tilde{x}[N-K]\,p_N[K]$

  - La TF de secuencias no verifica la dualidad.

* Desplazamiento temporal: $x[n-m] \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega m}X(e^{j\omega})$

$$\tilde{x}[n-m]\,p_N[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} e^{-j\frac{2\pi}{N}Km}X[K]$$

* Modulación (despl. frec.): $x[n]e^{j\omega_0 n} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

$$x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}\ell n} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[K-\ell]\,p_N[K]$$

* Convolución: $x_1[n] * x_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$

$$x_1[n] \circledN x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_1[K]\,X_2[K]$$

$$x_1[n] \circledN x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\,\tilde{x}_2[n-m] \quad \text{para } n=0,\dots,N-1$$

* Producto (enventanado): $x_1[n]\,x_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega}) \circled{2\pi} X_2(e^{j\omega})$

$$x_1[n]\,x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} X_1[K] \circledN X_2[K]$$

$$X_1(e^{j\omega}) \circled{2\pi} X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\lambda})\,X_2(e^{j(\omega-\lambda)})\,d\lambda$$

* Derivación en n: $-jn\,x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} \dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

* Parseval: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[K]|^2$$

Correlación y Densidad Espectral de Energía

* Secuencias de energía finita $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$

$$D[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n+m] - y[n]|^2 = E_x + E_y - \left(r_{xy}[m] + r_{yx}[-m]\right)$$

- A menor $D[m]$ más se parecen $x[n]$ y $y[n]$
- Esto es equivalente a que las correlaciones sean lo mayor posible.

$$\boxed{r_{xy}[m] = x[m] * y^*[-m] = r_{yx}^*[-m]}$$ Correlaciones cruzadas

$r_x[m] = x[m] * x^*[-m]$ Autocorrelación

Si $r_{xy}[m] = r_{yx} = 0$ $x[n]$, $y[n]$ incorreladas $\Rightarrow r_{x+y}[m] = r_x[m] + r_y[m]$

- En un sistema con respuesta impulsional $h[n]$:

$$\boxed{r_{xy}[m] = r_x[m] * h^*[-m]} \quad \boxed{r_{yx}[m] = r_x[m] * h[m]}$$
$$\boxed{r_y[m] = r_x[m] * r_h[m]}$$

- Propiedades de la autocorrelación

Δ $\boxed{E_x = r_x[0]}$ Además es el máx. $|r_x[m]| \leq r_x[0]$

Δ $\boxed{r_x[m] = r_x^*[-m]}$ Hermítica $\Rightarrow x[n]$ real $\rightarrow r_x[m]$ par

Δ $x[n]e^{j\omega_0 n} \longrightarrow r_x[m]e^{j\omega_0 m}$ (modulación)

- Densidad espectral de energía

$$\boxed{S_x(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_x[m]\} = |X(e^{j\omega})|^2}$$

$$E_x = r_x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})\, d\omega$$

Secuencias con Potencia Media Finita

$$\boxed{P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x_n[n]|^2}$$ Si periódica $\Rightarrow$ $\boxed{P_x = \frac{1}{P}\sum_{m=0}^{P-1} |x[m]|^2}$

$$r_x[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} r_{xN}[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N-m} x[n+m]\, x^*[n]$$

$$S_x[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} S_N(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_x[m]\}$$

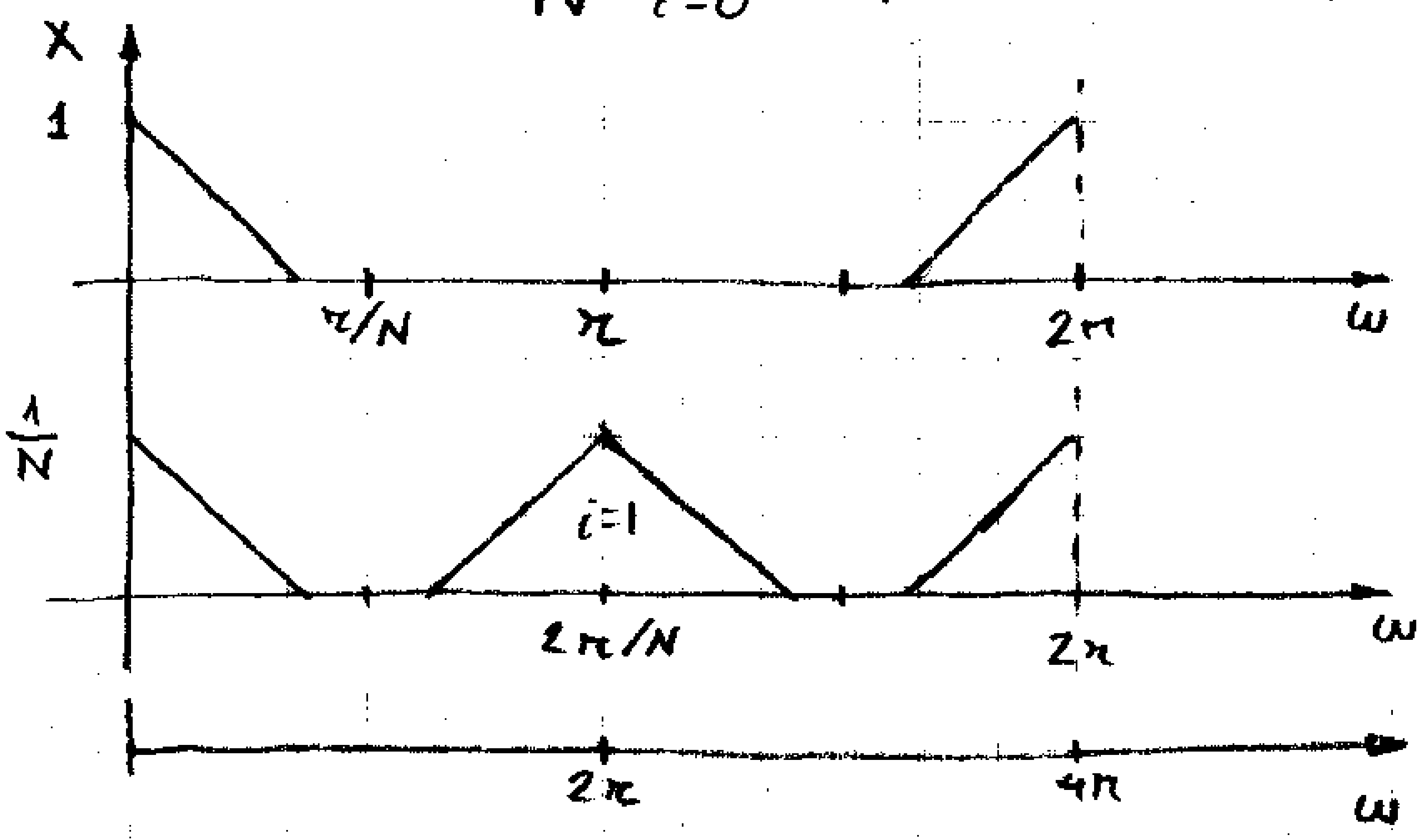
Diezmado e Interpolación

- Diezmado

$$x[n] \rightarrow \boxed{\omega_c = \pi/N} \rightarrow \boxed{\downarrow N} \rightarrow y[n] = x[Nn]$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{N} - \frac{2\pi}{N}i\right)}\right)$$

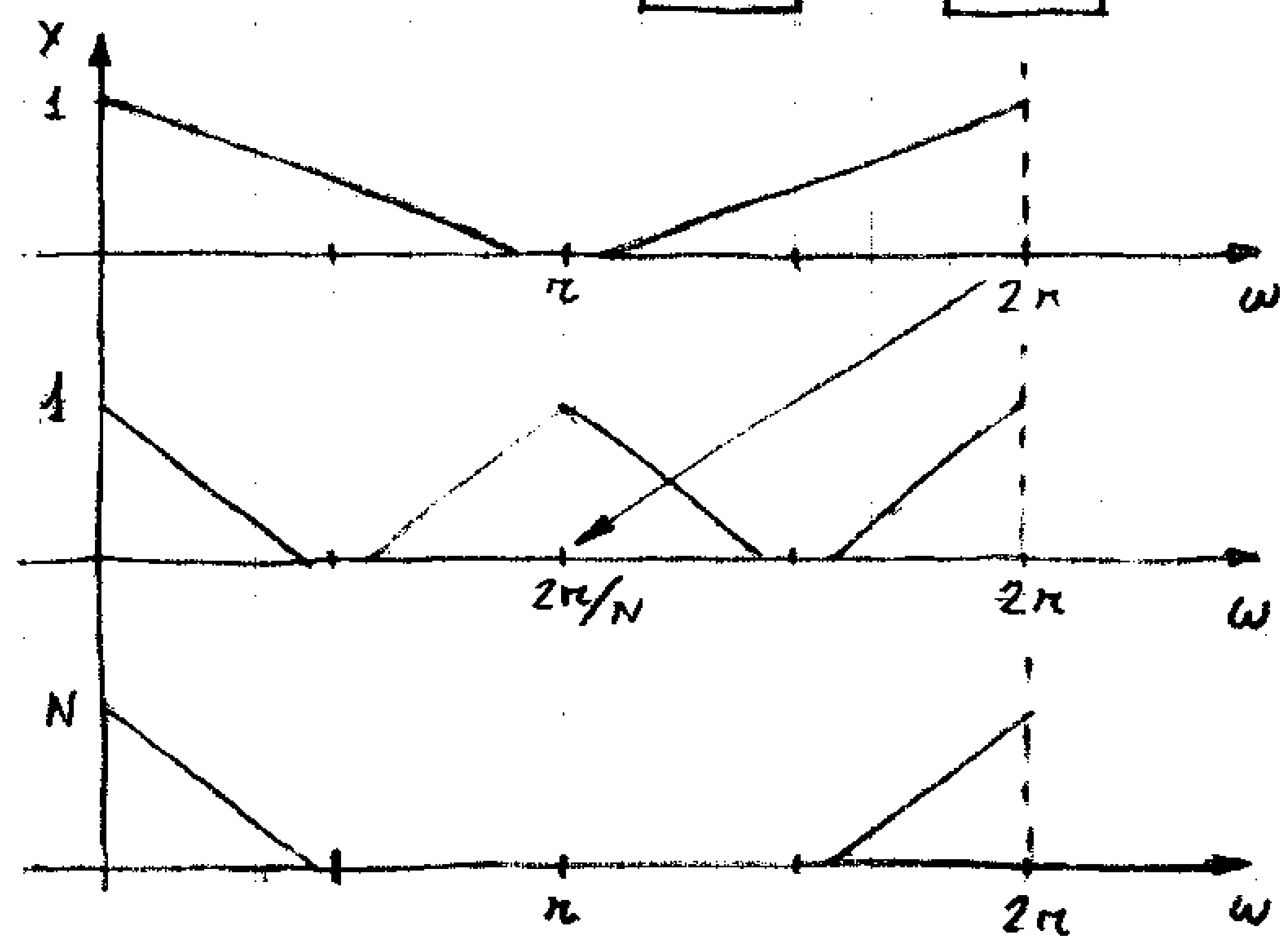
Ejemplo: Diezmado N=2



- Interpolación

$$x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow N} \rightarrow \boxed{\omega_c = \pi/N} \rightarrow y[n]$$

Ejemplo Interpolación N=2



- Aplicaciones

- Aumento frecuencia de muestreo ⇒ interpolación N ⇒ $F_m' = N \cdot F_m$
- Disminución " " ⇒ diezmado N ⇒ $F_m' = F_m/N$
- Simplificación de la conversión A/D, D/A (relajación espec. filtros)
- Translación en frecuencia (mux - demux de señales)
- Retardo no entero

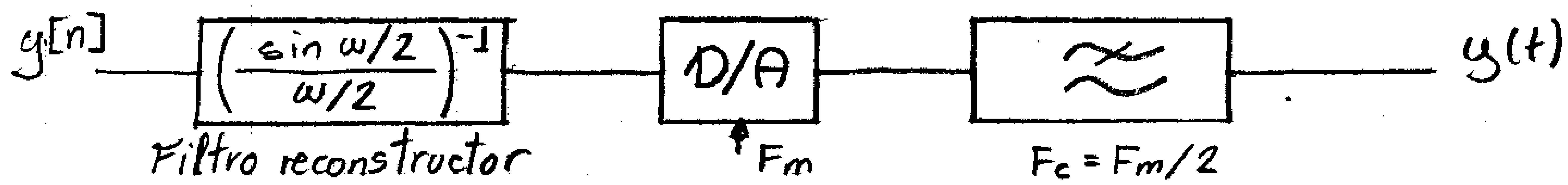
TEMA 3: MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES ANALÓGICAS

- Conversión A/D

frecuencia discreta $\boxed{f = F/F_m}$

Criterio de Nyquist (no aliasing) $\boxed{F_m \geq 2B_x}$

- Conversión D/A



TEMA 4

* LA TRANSFORMADA Z

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}}$$

C : contorno interior a la ROC

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz}$$

- ROC : Región del plano z en q $X(z)$ converge (anillo)
  - $x[n]$ causal $\Rightarrow$ ROC $\subset |z| = \infty$
  - $x[n]$ anticausal $\Rightarrow$ ROC $\subset |z| = 0$

- Relación con la T.F

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \iff \text{ROC} \subset |z| = 1$$

- Propiedades

		ROC
- Linealidad		Al menos $R_x \cap R_y$
- Retardo	$x[n-k] \longleftrightarrow z^{-k} X(z)$	$R_x - \{0, \infty\}$ a veces
- Convolución	$x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(z) Y(z)$	Al menos $R_x \cap R_y$
- Escalado en z	$z_0^n x[n] \longleftrightarrow X(z/z_0)$	$\lvert z_0\rvert r_2 < \lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert r_1$
- Reflexión en n	$x[-n] \longleftrightarrow X(z^{-1})$	$1/r_1 < \lvert z\rvert < 1/r_2$
- Derivación en n	$n x[n] \longleftrightarrow -z X'(z)$	$R_x - \{0, \infty\}$ a veces

- Tª del valor inicial : $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$

- Transformada z inversa (Modo práctico)

$\Rightarrow$ Desarroyo en fracciones $\rightarrow$ Identificar transf. conocidas

- Transformadas elementales

$a^n u[n] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1 - a z^{-1}}$ $\quad |z| > |a|$

$-a^n u[-n-1] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1 - a z^{-1}}$ $\quad |z| < |a|$

$\delta[n-m] \longleftrightarrow z^{-m}$

$p_L[n] \longleftrightarrow \dfrac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}}$ $\quad |z| > 0$

* FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

$$\boxed{H(z) = Y(z)/X(z)}$$

h[n] L.I. $\begin{cases} \text{-Estable} \iff ROC \in |z|=1 \\ \text{-Causal} \iff ROC \equiv \text{exterior de una circumferencia} \end{cases}$

- Diagrama de ceros y polos

  nº polos = nº ceros ≡ orden del sistema

  • Si $H(z)$ racional ⇒ ROC limitada por los polos
  + condiciones estabilidad - causalidad

- Respuesta forzada: terminos de respuesta de un sistema que evolucionan deacuerdo con la excitación.

- Respuesta libre: terminos que evolucionan segun los polos de la función de transferencia.

- Transformada z unilateral

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$ ROC: exterior de un circulo

Propiedades: Idem $Z\{\cdot\}$ excepto el desplazamiento

p.e.: $y[n] = x[n-1] \longrightarrow Y^+(z) = y[0] + z^{-1}X^+(z)$

- La transformada inversa se calcula igual que para la trans. z

* RESPUESTA FRECUENCIAL

Sistemas estables $\quad H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

- Módulo: $|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})\,H^*(e^{j\omega}) = \left\{\begin{matrix}\text{sistema}\\ \text{real}\end{matrix}\right\} = H(z)H(1/z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

- Fase: $\varphi(\omega) = \text{arctg}\left\{\dfrac{\text{Im}\{H(e^{j\omega})\}}{\text{Re}\{H(e^{j\omega})\}}\right\} = \dfrac{1}{2j}\ln\left(\dfrac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})}\right) \underset{\text{sist. real}}{=} \dfrac{1}{2j}\ln\left(\dfrac{H(z)}{H(z^{-1})}\right)\Bigg|_{z=e^{j\omega}}$

- Retardo de grupo: $\tau(\omega) = -\dfrac{\partial}{\partial\omega}\arg\{H(e^{j\omega})\} = -\dfrac{\partial}{\partial\omega}\varphi(\omega)$

$\boxed{\text{fase lineal} \Rightarrow \tau(\omega) = C_1\omega + C_2}$

* SISTEMAS ESPECIALES (sistemas reales)

- Sistemas paso todo $H_{pt}(z)$
  - Respuesta frecuencial con módulo unidad $\forall \omega$
  - Polos acompañados de un cero inverso conjugado $c_K = 1/\rho_K^*$

$$H_{pt}(z) = \frac{z^{-P} D(1/z)}{D(z)}$$

- Sistemas de fase mínima $H_{min}(z)$
  - $H(z)$ causal y estable es de fase mínima si $1/H(z)$ tb es causal y estable.
  - Polos y ceros dentro del circulo unidad.
  - El sistema inverso tb es de fase mínima.

- Cualquier sistema se puede descomponer como:

$$H(z) = H_{min}(z)\, H_{pt}(z)\, H_{cu}(z)$$

Recoge los ceros en el círculo unidad

- Fijado $H_{min}(z)\, H_{cu}(z)$ y tomando diferentes $H_{pt}(z)$ se obtinenen $H(z)$ con el mismo $|H(e^{j\omega})|$, pero solo uno de ellos es de fase mínima (Retardo de grupo mínimo)

* SISTEMAS DE FASE LINEAL ⇒ (Filtros)

Cond. necesarias y suficientes para que un sistema con $h[n] \in \mathbb{R}$ y $H(e^{j\omega})$ racional tenga fase lineal.

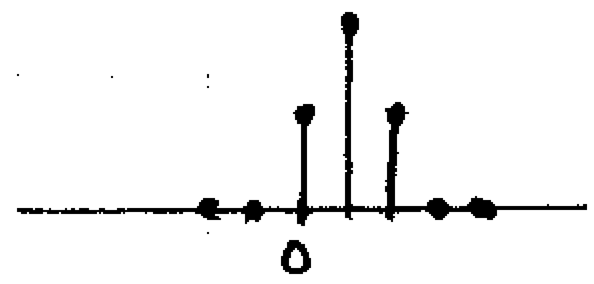
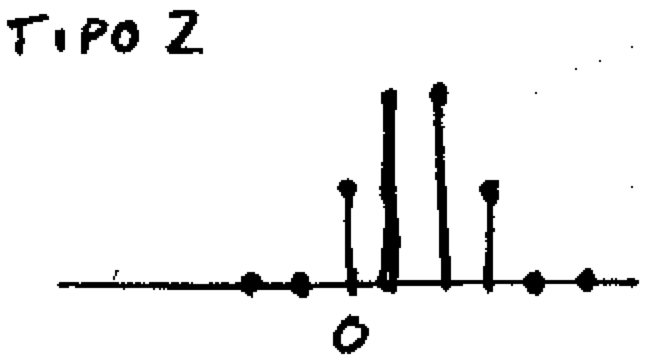
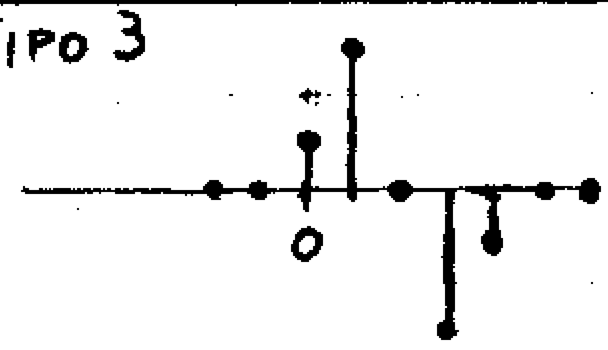
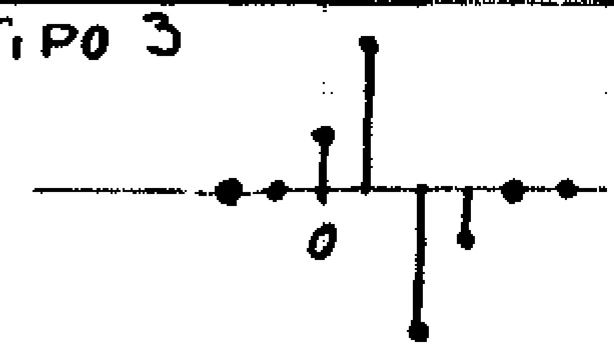
$$H(z) = \pm z^{-2\alpha} H(1/z)$$

$$\boxed{h[n] = \pm h[2\alpha - n] = \pm h[L-1-n]}$$

$$2\alpha = \underset{\text{orden}}{M} = \underset{\text{long. filtro}}{L} - 1$$

$h[n]$ causal : FIR causal ⇒ todos los polos en $z=0$

-Tipos de filtros FIR de fase lineal

Longitud L / Simetría	impar	par
par	TIPO 1 	TIPO 2 
impar	TIPO 3 	TIPO 3 

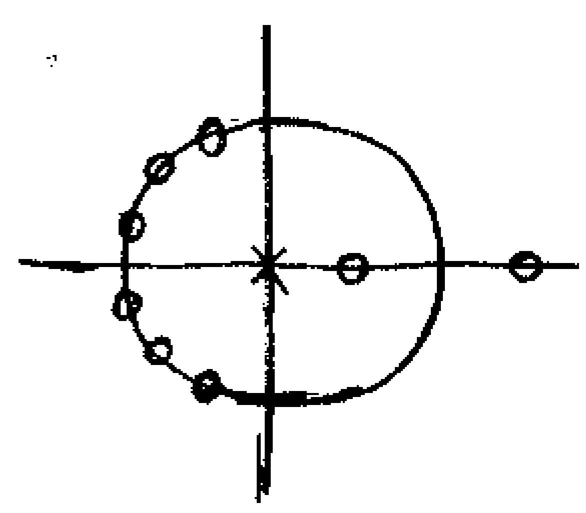
-Propiedades (FIR causal, estable)

TIPO	CEROS FORZADOS	ORDEN M	$L=M+1$ LONGITUD	$\alpha = M/2$ RETARDO	β	$h[n]$ SIMETRÍA
1	–	par	impar	entero	0	par
2	$z=-1$ $(\omega=\pi)$	impar	par	entero $+\frac{1}{2}$	0	par
3	$z=1,-1$ $(\omega=0,\pi)$	par	impar	entero	$\frac{\pi}{2}$	impar
4	$z=1$ $(\omega=0)$	impar	par	entero $+\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	impar

Fase $\psi(\omega) = -\alpha\omega + \beta + \pi K(\omega)$ (Expresión lineal generalizada)

-Comentarios

- Filtro elimina banda $\Rightarrow$ orden par
- Derivador, T. Hilbert $\Rightarrow$ tipo 3 ó 4 (cero en $\omega=0$)
- Filtro FIR paso bajo fase lineal:



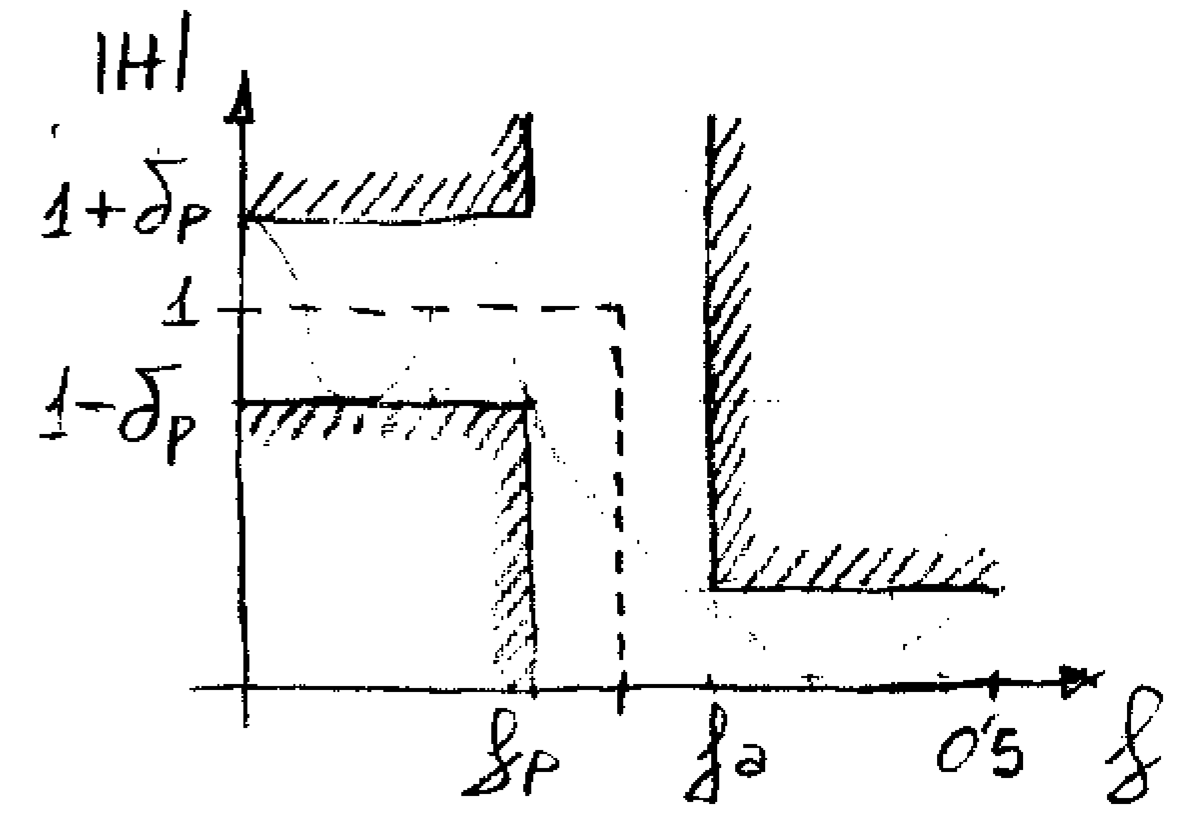
ceros en el semiplano izq.
(menos esos dos q se ven)

TEMA 5: DISEÑO DE FILTROS

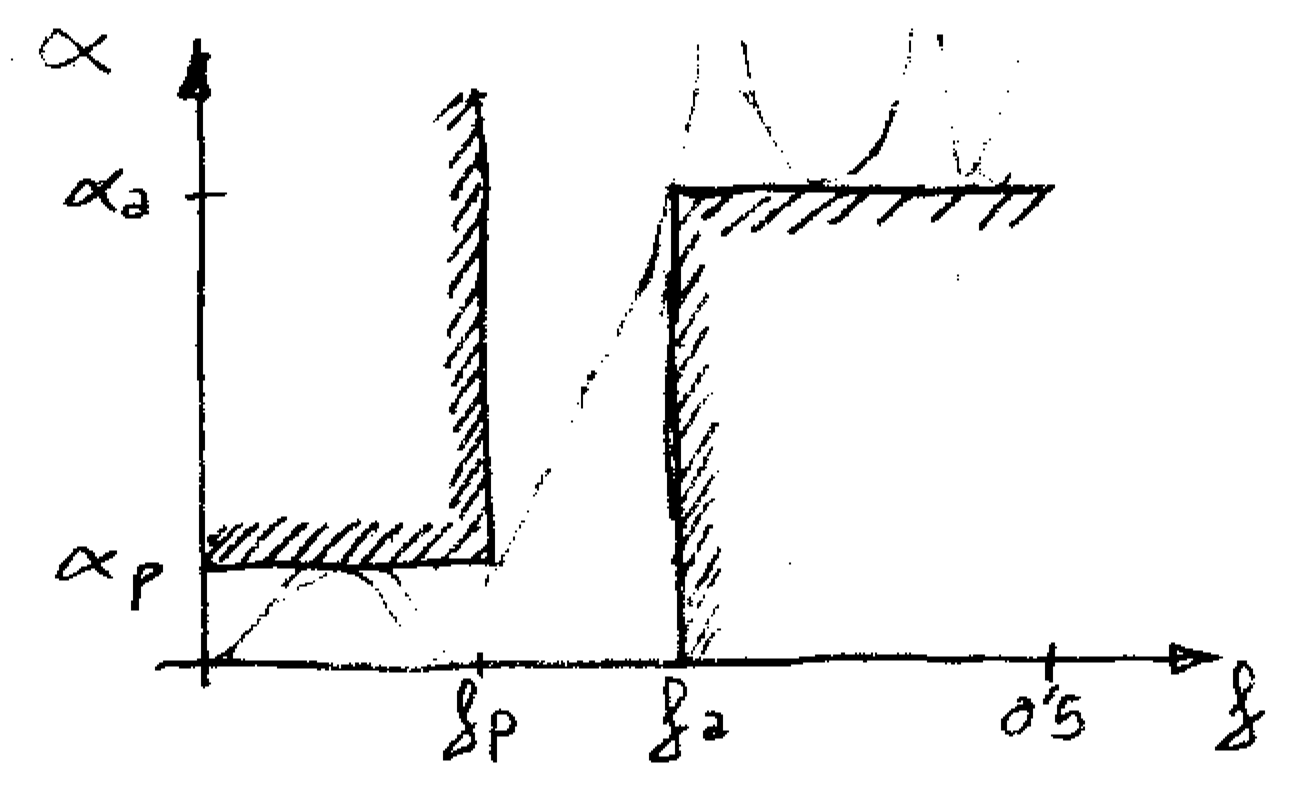
- Filtro ideal: aquel que elimina la señal en su banda atenuada, y deja pasar la que se encuentra en su banda de paso, pudiendo introducir un retardo cte. independiente de la frecuencia.

  - Nunca un filtro diseñado será ideal, ya que sería no causal e inestable.

- Especificaciones de un filtro:



(Esp. para el modulo)



(Esp. para la atenuación)

$$\boxed{\alpha(\omega) = 20\log\frac{H_{ref}}{|H(e^{j\omega})|}}$$

Parámetros de calidad:

- Discriminación: Es mas discriminante cuanto mayor sea la diferencia entre α_p y α_a
- Selectividad: Cuanto menor sea la Bda de transición más selectivo es el filtro.

* DISEÑO DE FILTROS FIR (causal, fase lineal)

- Tienen una longitud L finita y un orden $M = L-1$.
- Mediante enventanado de la h[n] ideal

$$H_I(e^{j\omega}) \xrightarrow{TF^{-1}} h_I[n] \xrightarrow{\text{Enventanado}} h[n] = h_I[n]\cdot v[n] \xrightarrow{TF} H(e^{j\omega})$$

- Dependiendo de la ventana escogida, el filtro tendrá una discriminación determinada.
  La selectividad en cambio, se controla mediante el orden del filtro $M = L-1 \Rightarrow L$: long. ventana.

- Para que el filtro tenga fase lineal ha de tener simetría central par $\Rightarrow v[n] = v[L-1-n]$

- Mediante muestreo de la respuesta frecuencial

$$H_I(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{muestreo}} H[K] = H_I(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{L}K} \qquad K = 0, \dots, M = L-1$$

$$h[n] = DFT^{-1}\{H[k]\} \qquad k = 0, \dots, M$$

- Filtros optimos con plantilla
  - Se definen las especificaciones del filtro ($f_a, f_p, \alpha_a, \alpha_p$)
  - Mediante métodos iterativos se busca un sistema que las cumpla.

  Estimación de $\boxed{L = \dfrac{-10\log(\delta_p \delta_a) - 13}{14'602\,\Delta f}}$ Δf: Bda transición más restrictiva

* DISEÑO DE FILTROS IIR
  - Se diseña el filtro analógico, y mediante una transformación bilinial se obtiene el equivalente discreto.
  - Parámetros de diseño del filtro analógico:
    - α_a, α_p : Las mismas del filtro discreto
    - Ω_a, Ω_p : $\boxed{\Omega = tg(\omega/2)}$
  - Transformación bilineal:

$$\boxed{H_{discreto}(z) = H_{analógico}(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}}$$

* COMPARACIÓN ENTRE FILTROS FIR E IIR

	Fase lineal	Estabilidad	Orden M	Determinación de M
FIR	siempre	siempre	Alto	Prueba-error
IIR	nunca	posible inestabilidad	Bajo	calculable

TEMA 6: SEÑALES ALEATORIAS

* PROCESOS ALEATORIOS DISCRETOS

- Media: $m_x[n] = E\{x[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f(x_1, n)\, dx_1$

- Autocorrelación: $r_x[n_1, n_2] = E\{x[n_1]\, x^*[n_2]\}$

  Potencia del proceso: $P_x[n] = r_x[n, n]$

- Autocovariancia: Dispersión alrededor del valor central

  $c_x[n_1, n_2] = E\{(x[n_1] - m_x[n_1])(x[n_2] - m_x[n_2])^*\} = r_x[n_1, n_2] - m_x[n_1] m_x[n_2]$

  Varianza del proceso: $\sigma_x^2[n] = c_x[n, n] = P_x[n] - |m_x[n]|^2$

* SIMILITUD ENTRE PROCESOS

- Correlación cruzada: $r_{xy}[n] = E\{x[n]\, y^*[n]\}$
- Procesos independientes $\Rightarrow E\{x[n]\, y^*[n]\} = E\{x[n]\} E\{y^*[n]\}$
- " incorrelados $\Rightarrow c_{xy}[n_1, n_2] = 0 \quad \forall n_1, n_2$

  Procesos independientes $\Rightarrow$ Procesos incorrelados

* PROCESOS ESTACIONARIOS

- Un proceso es estacionario <u>en sentido estricto</u> si sus propiedades son independientes del origen de tiempos.

- Un proceso es estacionario en sentido amplio si su media y su autocorrelación son independientes del origen de tiempos.

  $E\{x[n]\} = m_x \quad ; \quad r_x[n_1, n_2] = r_x[n_1 - n_2]$

* PROCESOS ERGÓDICOS

- Son aquellos en que esperanza estadística y promedio temporal coinciden.
- En media: (Para la realización ξ)

$$m_x = E\{x[n]\} \cong \widehat{m}_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n;\xi]$$

- En correlación: $\quad r_x[n+m,n] = \widehat{r_x[m]}$

* Proceso ergódico $\Rightarrow$ Proceso estacionario

* PROCESOS Y SISTEMAS L.I

$x[n]$ estacionario $\Rightarrow \quad m_y = m_x H(e^{j\omega})|_{\omega=0}$

$$r_{yx}[m] = r_x[m]\, h[m] \quad ; \quad r_y[m] = r_x[m]\, r_h[n]$$

* DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

$$S_x(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_x[m]\}$$

$$P_x = E\{x[n]^2\} = r_x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})\, d\omega$$

A la salida de un sistema L.I: $\quad S_y(e^{j\omega}) = S_x(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2$

* ESTIMACIÓN DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

$$\widehat{S}_x(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{\tfrac{1}{L} r_y[m]\}$$

$$E\{\widehat{S}_x(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi L}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\theta})\,|V(e^{j(\omega-\theta)})|^2\, d\theta$$

$y[n] = x[n]\, v[n] \quad : \quad v[n]$ ventana de Long. L

- Periodograma: estimación resultante de utilizar $v[n] = p_L[n]$