Tema 4

Transformada de Laplace.

Lo que se presenta en estos folios es un esquema resumen del tema de Transformada de Laplace. Como aplicación más importante se presenta el cálculo de integrales impropias utilizando transformadas. En los temas posteriores se verá la aplicación de las transformada de Laplace para la resolución de determinadas ecuaciones diferenciales.

4.1 Definición de Transformada

Se define transformada de Laplace de una función: $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, como la función $f(s)$ determinada por

$$\mathcal{L}\left[F(t)\right] = f(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} F(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

siempre que dicha integral exista.

Para que la integral 4.1 converja absoluta y uniformemente para $s \geq \gamma$ (y por lo tanto, exista transformada de Laplace para $s \geq \gamma$), es necesario exigir ciertas condiciones a la función $F(t)$. Dichas condiciones establecen un teorema de existencia de transformada de Laplace, en el que se comprueba que basta con suponer que F verifica las siguientes propiedades:

1. $F(t) = 0$ para todo $t < 0$[1].

2. F es de orden exponencial γ, es decir, existen constantes $M, N > 0$ tales que:

$$|F(t)| < M\mathrm{e}^{\gamma t} \qquad \forall\, t > N.$$

3. La función F es continua a trozos en cualquier subintervalo $[0, T]$.

Es importante observar que el teorema propone una condición suficiente para la existencia de $\mathcal{L}\left[F(t)\right]$, pero no una condición necesaria. Así, por ejemplo, aunque la función $t^{-1/n}$ no es continua a trozos en $[0, T]$ (debido a que $\lim\limits_{t \to 0^+} t^{-1/n} = \infty$), posee transformada de Laplace.

[1] Aunque parezca que esta restricción es muy fuerte, hay que tener en cuenta que, generalmente, t va a representar la variable *tiempo* en las aplicaciones físicas y, por lo tanto, no es de mucha utilidad considerar tiempos negativos

4.2 Transformadas de las funciones elementales

En la siguiente tabla aparecen las transformadas de Laplace de las funciones elementales:

Función $F(t)$	Transformada $f(s) = \mathcal{L}[F(t)]$	Función $F(t)$	Transformada $f(s) = \mathcal{L}[F(t)]$
1	$f(s) = \dfrac{1}{s} \qquad s > 0$	e^{at}	$f(s) = \dfrac{1}{s-a} \qquad s > a$
t^n	$f(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \qquad s > 0$	$t^x \qquad x > -1$	$f(s) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \qquad s > 0$
$\operatorname{sen}(at)$	$f(s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2} \qquad s > 0$	$\cos(at)$	$f(s) = \dfrac{s}{s^2 + a^2} \qquad s > 0$
$\operatorname{senh}(at)$	$f(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2} \qquad s > \lvert a \rvert$	$\cosh(at)$	$f(s) = \dfrac{s}{s^2 - a^2} \qquad s > \lvert a \rvert$

$F(t-t_0)u(t-t_0) \qquad F(s)e^{-t_0 s}$

$\delta(t-t_0) \qquad e^{-t_0 s}$

Tabla 1: Transformadas de Laplace de funciones elementales.

4.3 Propiedades de las Transformadas de Laplace

Una vez vistas las transformadas de las funciones elementales de la tabla 1, se enuncian en esta sección las principales propiedades de las transformadas de Laplace, que permitirán aumentar considerablemente el número de funciones a las que poder calcular su transformada. Estas propiedades son:

Sean $f(s) = \mathcal{L}[F(t)]$, $f_1(s) = \mathcal{L}[F_1(t)]$ y $f_2(s) = \mathcal{L}[F_2(t)]$

1. $\mathcal{L}$ es un **operador lineal**, es decir, $\quad \mathcal{L}[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)] = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$

2. **Traslación**: si $\quad G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \quad$ entonces: $\quad \mathcal{L}[G(t)] = e^{-as} f(s)$

   $G(t) = 0[1-u(t-a)] + F(t-a)[u(t-a)]$

3. **Cambio de escala**: $\quad \mathcal{L}[F(at)] = \dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{s}{a}\right) \qquad \forall\, a > 0$

4. **Transformada de la derivada**: $\quad \mathcal{L}[F'(t)] = s f(s) - F(0)$

   y, generalizando para derivada de orden n:

   $$\mathcal{L}\left[F^{n)}(t)\right] = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{n-2)}(0) - F^{n-1)}(0)$$

5. **Transformada de la integral**: $\quad \mathcal{L}\left[\int_0^t F(u)\,\mathrm{d}u\right] = \dfrac{f(s)}{s}$

6. **Multiplicación por potencias de t**: $\quad \mathcal{L}[t^n F(t)] = (-1)^n \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} f(s)$

Funciones periódicas

$$\mathcal{L}(F(t)) = \frac{1}{1-e^{sT}} \int_0^T F(t) e^{-st}\, dt$$

7. **División por t**: si $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{F(t)}{t}$ existe, entonces: $\mathcal{L}\left[\dfrac{F(t)}{t}\right] = \displaystyle\int_s^{\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$

8. **Multiplicación por exponenciales**: si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces: $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\alpha t}F(t)\right] = f(s-\alpha)$

9. **Convolución**: si $F_1 * F_2 = \displaystyle\int_0^t F_1(u)F_2(t-u)\,\mathrm{d}u$ entonces: $\mathcal{L}[F_1 * F_2] = f_1(s)\cdot f_2(s)$

4.4 Teoremas sobre Transformadas

Enunciamos en esta sección el comportamiento de la transformada en el infinito, así como los teoremas de conexión de los valores «iniciales» y «finales»:

Si $f(s) = \mathcal{L}[F(t)]$ se tiene que:

1. **Comportamiento en el infinito**:

   $\lim\limits_{s\to\infty} f(s) = 0$

2. **Teorema del valor inicial**:

   Si $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t)$ existe, entonces: $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sf(s)$

3. **Teorema del valor final**:

   Si $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$ existe, entonces: $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \lim\limits_{s\to 0^+} sf(s)$

4.5 Transformada Inversa

En la práctica es de vital importancia el poder recuperar $F(t)$ a partir de su transformada de Laplace $f(s) = \mathcal{L}[F(t)]$. Para ello, se define la *transformada inversa de Laplace* $\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$ como la función $F(t)$ tal que $\mathcal{L}[F(t)] = f(s)$. Sin embargo, con esta definición, habrá que tener especial cuidado con la unicidad de la transformada inversa. Por ejemplo, dadas la funciones:

$$F(t) = \mathrm{e}^{-2t} \qquad \text{y} \qquad G(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2t} & t \neq 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

se tiene que $\mathcal{L}[F(t)] = \mathcal{L}[G(t)] = \dfrac{1}{s+2}$ por lo que la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2}\right]$ no es única.

Por esta razón, se enuncia el *Teorema de Lerch* que asegura la unicidad de la transformada inversa salvo en puntos de discontinuidades:

Teorema de Lerch
Si $F(t)$ es continua a trozos en cada intervalo $[0, N]$ y es de orden exponencial γ para $t > N$, entonces la transformada inversa de Laplace de $f(s) = \mathcal{L}[F(t)]$ es única salvo quizás en puntos de discontinuidades.

4.6 Transformadas inversas elementales

Como resultado directo de la definición de transformada inversa de Laplace y las transformadas de Laplace vistas en la tabla 1, se obtienen las correspondientes transformadas inversas.

Función $f(s)$	**Transformada Inversa** $F(t)=\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$	**Función** $f(s)$	**Transformada Inversa** $F(t)=\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$
$f(s)=\dfrac{1}{s}$	$F(t)=1$	$f(s)=\dfrac{1}{s-a}$	$F(t)=e^{at}$
$f(s)=\dfrac{1}{s^{n+1}}$	$F(t)=\dfrac{t^n}{n!}$	$f(s)=\dfrac{1}{s^{x+1}}$	$F(t)=\dfrac{t^x}{\Gamma(x+1)} \quad x>-1$
$f(s)=\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$F(t)=\dfrac{\mathrm{sen}(at)}{a}$	$f(s)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$F(t)=\cos(at)$
$f(s)=\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$F(t)=\dfrac{\mathrm{senh}(at)}{a}$	$f(s)=\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$F(t)=\cosh(at)$

Tabla 2: Transformadas Inversas de Laplace.

4.7 Propiedades de las Transformadas Inversas de Laplace

Como resultado inmediato de la definición de transformada inversa y de las propiedades de las transformadas de Laplace, se tienen las siguientes propiedadas para las transformadas inversas:

Sean $F(t)=\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$, $F_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[f_1(s)]$ y $F_2(t)=\mathcal{L}^{-1}[f_2(s)]$

1. $\mathcal{L}^{-1}$ es un **operador lineal**, es decir, $\mathcal{L}^{-1}[c_1f_1(s)+c_2f_2(s)]=c_1F_1(t)+c_2F_2(t)$
2. **Traslación**: $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}f(s)\right]=G(t)$ siendo $G(t)=\begin{cases} F(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases}$
3. **Cambio de escala**: $\mathcal{L}^{-1}[f(as)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{t}{a}\right)$
4. **Transformada de la integral**: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{f(s)}{s}\right]=\int_0^t F(u)\,\mathrm{d}u$
5. **Multiplicación por potencias de** t: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\mathrm{d}^n f(s)}{\mathrm{d}s^n}\right]=(-1)^n t^n F(t)$
6. **División por** t: $\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^\infty f(u)\,\mathrm{d}u\right]=\dfrac{F(t)}{t}$
7. **Multiplicación por exponenciales**: Si $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces: $\mathcal{L}^{-1}[f(s-\alpha)]=e^{\alpha t}F(t)$
8. **Convolución**: Si $F_1 * F_2=\int_0^t F_1(u)F_2(t-u)\mathrm{d}u$ entonces: $\mathcal{L}^{-1}[f_1(s)\cdot f_2(s)]=F_1 * F_2$

Además de la utilización de dichas propiedades, se puede aplicar un método bastante útil para el caso particular de calcular la transformada inversa de una fracción racional. Así, si $f(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, debido al teorema del comportamiento en el infinito, la transformada inversa existirá siempre que el grado del polinomio del numerador $P(s)$ es menor que el grado de $Q(s)$, y la forma de calcular dicha transformada inversa consistirá en descomponer en fracciones simples $f(s)$, para posteriormente, utilizando la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$, obtener $\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$ como suma de las transformadas inversas de cada fracción simple (a las que posiblemente se aplicarán algunas de las propiedades para su cálculo).

4.8 Cálculo de integrales impropias

Teniendo en cuenta las propiedades de las integrales dependientes de un parámetro, si $F(t)$ es una función continua (o posee un número numerable de discontinuidades) y $f(s) = \mathcal{L}[F(t)]$, se tendrá que:

$$\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} f(s)$$

ya que $\lim_{s\to 0} \mathrm{e}^{-st}F(t) = F(t)$. Así, se podrán calcular, de forma fácil, integrales como

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathrm{d}t$$

integral que sin utilizar transformadas sería bastante complicada de resolver.

- Producte de convolució

$$(f*g) = \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du$$

- Propietats

$$f*g = g*f$$
$$(f+g)h = f*h + g*h$$
$$(f*g)*h = f*g*h$$
$$0*f = 0$$

$$1*f \neq f$$
$$f*f \neq f^2$$

- Teorema

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)$$

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

$$y(t) = h(t) * f(t)$$

$$H(s) = \frac{Y}{F(s)} \qquad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

Obs
Si $y(0)=0$; $y'(0)=0$
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{C_A(s)}\right\}$$

Problemes de contorn d'Sturm-Liouville

$$\begin{cases} [p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \\ a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0 \\ b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0 \end{cases}$$

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y$$

Es tracta d'estudiar els vap's y vep's de $L[y] = \lambda r(x) y$

- Normalització

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

$$\Rightarrow [\mu P(x) y']' + \mu R(x) y = 0 \qquad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q-P'}{P}$$

- Identitat de Lagrange

$$\int_0^1 L[u] \cdot v - u L[v] \, dx = -p(x)[u'v - uv']_0^1$$

Si u i v compleixen les cond. de contorn:

$$\int_0^1 L[u] v = \int_0^1 u L[v] \Rightarrow \langle L[u], v \rangle = \langle u, L[v] \rangle$$

* Tots els vap's d'un problema de contorn d'Sturm-Liouville són reals i es poden ordenar $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$

* Que hacer cuando los vep's de un vap de un sistema de EDO's liniales no son suficientes? (hay menos vep's que la multiplicidad del vap)

** $B = (A - \lambda Id) \in \mathbb{R}^n$ $\begin{cases} rg\, B = a \\ \dim(Ker\, B) = n - a < mult\ \lambda \end{cases}$

** hacemos B^n tq $\dim(Ker\, B^n) = mult\ \lambda$

$$Ker\, B^n = \langle a_0, b_0, c_0, \dots \rangle$$

** Obtenemos las soluciones de la siguiente forma:

$$Y_1 = e^{\lambda t}\left[a_0 + B a_0 t + \frac{1}{2} B^2 a_0 t^2 + \dots + \frac{1}{n!} B^n a_0 t^n\right]$$

$$\vdots$$

$$Y_x = e^{\lambda t}\left[x_0 + B x_0 t + \frac{1}{2} B^2 x_0 t^2 + \dots + \frac{1}{n!} B^n x_0 t^n\right]$$

$$Y = \sum_i Y_i C_i$$

EDOs (EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINARIES).

- 1er ORDRE
  - VARIABLES SEPARABLES

$$y' = \frac{dy}{dx} = M(x)\,N(y) \Rightarrow \frac{dy}{N(y)} = \frac{dx}{N(x)} \Rightarrow \int \frac{1}{M(y)}\,dy = \int \frac{1}{N(x)}\,dx$$

  - EQ HOMOGÈNEA

$y' + P(x)y + Q(x) = 0$ (és de variables separables)

  - REDUCCIÓ A L'EQ. HOMOGÈNIA

Mitjançant canvis de variable una equació amb variables x, y es pot transformar en homogènia.

  - EQ. DE BERNOULLI

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \Rightarrow z = y^{1-n}$$

$$y' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

- 2on ORDRE
  - HOMOGÈNIA DE COEFICIENTS CONSTANTS

$$y^n + \cdots + ay'' + by' + cy = 0$$

$$C(r) = r^n + \cdots + ar^2 + br + c = (r+\alpha_1)^{n_1}(r+\alpha_2)^{n_2}\left[(r+\alpha_n+\gamma_n i)(r+\alpha_n-\gamma_n i)\right]$$

    - Arrels reals simples

$$y_g = C_1 e^{-\alpha_1 x} + C_2 e^{-\alpha_2 x} + \cdots$$

    - Arrel de multiplicitat $n > 1$

$$y_g = e^{-\alpha_1 x}\left(C_1 + C_2 x + \cdots + C_n x^n\right)$$

    - Arrels complexes conjugades

$$y_g = e^{-\alpha x}\left(C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x\right)$$

  - NO HOMOGÈNIA

$$y^n + \cdots + ay'' + by' + cy = f(x) \Rightarrow y = y_g + y_p$$

$y_g \Rightarrow$ solució eq. homogènea $y^n + \cdots + cy = 0$

$y_p \Rightarrow$ consultar ⚠