TEMA 1: INTRODUCCIÓN A LAS COMUNICACIONES

* CORRELACIÓN Y ESPECTRO DE SEÑALES DETERMINISTAS

- Definiciones básicas

- Media temporal de una señal $\boxed{\overline{x(t)} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt}$
- Energía $\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt}$
- Potencia instantánea $\boxed{P_x(t) = |x(t)|^2}$
- Potencia media $\boxed{P_x = \overline{|x(t)|^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt}$

- Señales de Energía Finita (E.F) $0 < E_x < \infty$

- Una señal E.F. tiene potencia media nula $P_x = 0$
- Todas las señales de duración finita son de E.F.

- Correlación cruzada
- Autocorrelación $[y(t) = x(t)]$ $\boxed{R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,y^*(t)\,dt}$
- Dens. Espectral de energía cruzada $\boxed{S_{xy}(f) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\} = X(f)\cdot Y^*(f)}$
- Dens. Espectral de energía $\boxed{S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = X(f)\cdot X^*(f) = |X(f)|^2}$

- ENERGÍA $\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df = R_x(\tau)\Big|_{\tau=0}}$

- Señales de Potencia Media Finita (PMF) $0 < P_x < \infty$

- Una señal de PMF tiene energía infinita $E_x = \infty$
- Todas las señales periódicas son de PMF

⚠ Las correlaciones NO se pueden expresar como $R_x(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$

- Correlación cruzada $\boxed{R_{xy}(t) = \overline{x(t+\tau) * y^*(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\,y^*(t)\,dt}$

- Dens. espectral de potencia cruzada $\boxed{S_{xy}(f) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\}}$ $\boxed{S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}}$

• POTENCIA $\boxed{P_x = \overline{|x(t)|^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = R_x(t)\Big|_{t=0}}$

- Señales periódicas

$$\boxed{R_x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c(m)|^2 e^{j2\pi \frac{m}{T_0} t}} \qquad c(m) = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{m}{T_0}\right)$$

$$\boxed{P_x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c(m)|^2}$$

- Propiedades de las correlaciones

1/ $|R_x(t)| \leq R_x(0)$
2/ $R_{xy}(t) = R_{yx}^*(-t)$ $\qquad R_x(t) = R_x^*(-t)$ "hermítica"

- Correlación y dens. espectral a traves de sistemas L.I.

E.F. y P.M.F

$$\boxed{\begin{aligned} R_{xy}(t) &= R_x(t) * h^*(-t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_{xy}(f) = S_x(f) H^*(f) \\ R_{yx}(t) &= R_x(t) * h(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_{yx}(f) = S_x(f) H(f) \\ R_y(t) &= R_x(t) * h(t) * h^*(-t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2 \end{aligned}}$$

- Suma de dos señales (Correlación y dens. espectral)

$$R_z(t) = R_x(t) + R_y(t) + R_{xy}(t) + R_{yx}(t) \qquad z(t) = x(t) + y(t)$$

$$S_z(f) = S_x(f) + S_y(f) + S_{xy}(f) + S_{yx}(f)$$

$$E_z = R_z(0) = E_x + E_y + R_{xy}(0) + R_{yx}(0) \qquad \text{E.F.}$$

$$P_z = R_z(0) = P_x + P_y + R_{xy}(0) + R_{yx}(0) \qquad \text{P.M.F}$$

- Correlación de dos cosenos

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) \qquad y(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

$$R_{xy}(t) = \begin{cases} 0 & f_1 \neq f_2 \\ \frac{A_1 A_2}{2} \cos(2\pi f_1 t) & f_1 = f_2 \end{cases}$$

TEMA 2: CORRELACIÓN, PROCESOS ALEATORIOS Y RUIDO

- Esperanza $\boxed{E\{x(t)\} = m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(t)\, dx}$

- Autocorrelación $\boxed{R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1) * x^*(t_2)\}}$ $\boxed{R_x(t,t) = P_x}$

- Autocovarianza $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1) \cdot m_x(t_2)$
- Varianza $\sigma_x^2(t) = C_x(t,t) = R_x(t,t) - |m_x(t)|^2$

- Calculo práctico de la esperanza

- La esperanza es un operador lineal $E\{x(t)+y(t)\} = E\{x(t)\} + E\{y(t)\}$
- La esperanza de una función determinista es ella misma.

- ESTACIONARIDAD

Un proceso aleatorio es estacionario cuando sus parámetros estadísticos no dependan del origen de tiempos, solo dependen de la diferencia de tiempos (τ)

- Sentido Amplio : $m_x(t) = cte$; $R_x(t+\tau, t) \equiv R_x(\tau)$

Los p.a.e.s.a se pueden tratar como señales de PMF.

- Cicloestacionariedad $nT_1 = mT_2$

$$m_x(t) = m_x(t+T_1) \;;\; R_x(t+\tau, t) = R_x(t+\tau+T_2, t+T_2)$$

- ERGODICIDAD

Un p.a. es ergódico si a partir de una realización podemos calcular alguno de sus momentos.

ERGODICIDAD $\Longleftrightarrow$ Media estadística = Media temporal

ERGODICIDAD $\Rightarrow$ ESTACIONARIEDAD

$\boxed{m_x = \overline{m_x}}$ $\boxed{R_x(\tau) = \overline{R_x(\tau)}}$

- 1ª DE WIERNER - KINCHINE

Para cualquier tipo de proceso $\boxed{S_x(f) = \mathcal{F}\{\overline{R_x(t+\tau,t)}\}}$

- Proceso estacionario $\overline{R_x(t+\tau,t)} = R_x(\tau)$ $\boxed{S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}}$

- Calculo de Potencias

$$\boxed{P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df = \overline{R_x(t+\tau,t)}\Big|_{\tau=0} = \overline{E\{|x(t)|^2\}}}$$

Proceso estacionario $\Rightarrow$ $\boxed{P_x = R_x(0)}$

- P.A. A TRAVES DE SISTEMAS L.I.

$$\boxed{m_y(t) = m_x(t) * h(t)}$$

$$\overline{R_y(t+\tau,t)} = \overline{R_x(t+\tau,t)} * h(\tau) * h^*(-\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$$

$$\overline{R_{xy}(t+\tau,t)} = \overline{R_x(t+\tau,t)} * h^*(-\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_{xy}(f) = S_x(f)\,H^*(f)$$

$$\overline{R_{yx}(t+\tau,t)} = \overline{R_x(t+\tau,t)} * h(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_{yx}(f) = S_x(f)\,H(f)$$

$\Uparrow$

$S(f) = \mathcal{F}\{\overline{R(\ )}\}$

$$\boxed{P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,|H(f)|^2\,df}$$

- P.A. Estacionarios a traves de sistemas L.I.

$$\left.\begin{aligned} m_y(t) &= m_x H(0) = m_y \\ R_y(\tau) &= R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \\ R_{xy}(\tau) &= R_x(\tau) * h^*(-\tau) \\ R_{yx}(\tau) &= R_x(\tau) * h(-\tau) \end{aligned}\right\}$$ $y(t)$ tb es p.a.e.

- RUIDO BLANCO (Ruido aditivo gausiano y blanco)

- El ruido blanco es un p.a. gausiano con una dens. espectral de potencia identica a cualquier frecuencia.

$$\boxed{S_x(f) = N_0/2 \quad \forall f} \qquad \boxed{m_x = 0} \qquad P_x = \infty$$

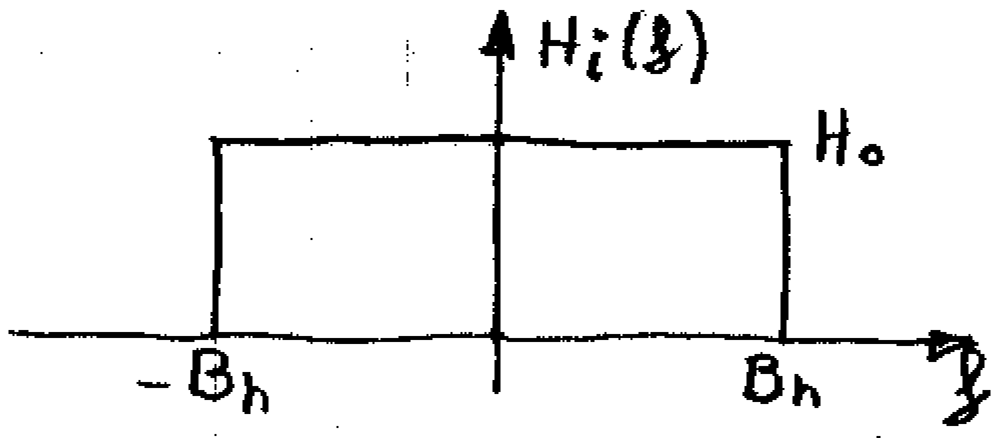
- Normalmente nos bastara con que el ruido se pueda considerar blanco en un intervalo de frecuencias.

- Ruido blanco a traves de un sistema L.I.

- La salida $y(t)$ no es un proceso blanco, ya que su potencia no es infinita.

$$\boxed{S_y(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2} \qquad y(t) \Rightarrow \text{ruido coloreado}$$

- RUIDO FILTRADO



Filtro paso bajo ideal

$$S_w(f) = N_0/2\,|H_0|^2\,\Pi\left(\frac{f}{2B_h}\right)$$

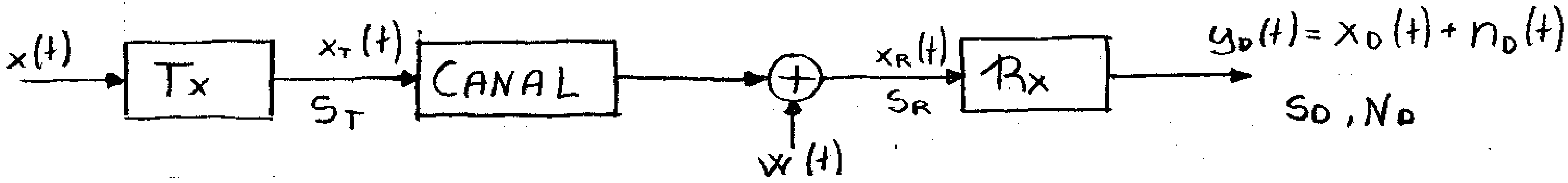
$$P_w = N_0|H_0|^2 B_h$$

- Ancho de banda equivalente

  - Ancho de banda que tendria que tener un filtro ideal para que la potencia a su salida coincida con la del filtro real.

$$\boxed{B_N = \frac{1}{2|H_{R\,max}|^2}\int_{-\infty}^{\infty}|H_R(f)|^2\,df}$$

TEMA 3 | TRANSMISIÓN ANALÓGICA EN BDA BASE



Relación señal-ruido en deteccion $\boxed{SNR_D = \frac{S_D}{N_D}}$

- CANAL IDEAL

- Es aquel que unicamente introduce un retardo y una atenuación

$$\boxed{h_c(t) = \alpha\,\delta(t - t_d)} \qquad \boxed{H_c(f) = \alpha\, e^{-j2\pi f t_d}}$$

- Coef. de atenuación del canal $L = 1/\alpha^2 = S_T/S_R$

Atenuación de 3dB $\quad L = 10^{3/10} \approx 2 \qquad \alpha = 1/\sqrt{2}$

- CANAL CON DISTORSIÓN LINEAL

- De Amplitud: $|H_c(f)|$ no es cte., depende de f
- De Fase: La fase $\text{Arg}\{H(f)\}$ no es lineal

$\Rightarrow$ No tiene la forma $2\pi f t_d + 2\pi n$; $\forall n$

* La solución consiste en colocar un ecualizador en el receptor de forma q. el conjunto se comporte como un canal ideal

$$\boxed{H_{eq}(f) = \frac{\alpha\, e^{-j2\pi f t_d}}{H_c(f)}}$$

Este filtro acostumbra a no ser realizable, lo que se hace es considerar solo las frecuencias que nos interesan y hacer su extensión periódica al resto de frec.:

$$\boxed{H_{eq}(f) = \alpha\, e^{-j2\pi f t_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n)\, e^{-j2\pi \frac{n}{2B_x} f}}$$

El cual aproximaremos cogiendo solo parte de sus coeficientes (de $-N$ a N) para que sea realizable.

$$\boxed{h_{eq}(t) = \alpha \sum_{n=-N}^{N} C(n)\, \delta(t - t_d - nT)} \qquad T \leq 1/2B_x$$

Para que el filtro sea causal $\boxed{t_d \geq NT}$

-CANAL CON DISTORSIÓN NO LINEAL

- En los casos en que no podemos encontrar una función $H(f)$ para el canal, podemos aproximar $y(t)$ por una función polinómica de grado n.
- Una no linealidad suele aparecer cuando la señal de entrada supera el margen dinámico del canal.
- Si la entrada són dos cosenos de frec. f_1, f_2 a la salida tendremos armónicos en las frec $nf_1 + mf_2$ $\quad n,m \geq 0$

-Compansión (Compresión - Expansión)

- El compresor reduce la amplitud de las frecuencias que tengan una amplitud superior al margen dinámico del canal, y amplifica las que tienen poca amplitud.
- En el receptor la señal se expande para recuperarla.

- RUIDO Y SNR

- En una transmisión bda base a traves de un canal ideal es necesario eliminar el ruido fuera de la bda util mediante un filtro paso bajo. con una ganancia G_R.

$$\boxed{SNR_D = \frac{S_T}{L N_0 B_N}}$$

B_N : ancho de bda equivalente de ruido
S_T : potencia transmitida.

- Vemos que el SNR_D no depende de la ganancia del filtro G_R.

- FILTROS TERMINALES OPTIMOS

- Par de filtros (uno en transmisión y otro en recepción) que maximizan el SNR_D del sistema.

$$\boxed{|H_R(f)|^2 = \frac{\sqrt{S_x(f)}}{\sqrt{S_n(f)} \cdot |H_c(f)|}} \qquad \boxed{|H_T(f)|^2 = \frac{\alpha^2 \cdot \sqrt{S_n(f)}}{\sqrt{S_x(f)} \cdot |H_c(f)|}}$$

$$\boxed{SNR_D\Big|_{max} = \frac{S_T \cdot P_x}{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{S_x(f)}\sqrt{S_n(f)}}{|H_c(f)|} \right|^2}} \leq SNR_D\Big|_{\text{Filtro ideal}}$$

TEMA 4: SEÑALES Y SISTEMAS PASO BANDA

+ SEÑAL ANALÍTICA Y TRANSF. DE HILBERT

$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow X(f)$ hermítica (info. redundante)

$\boxed{A_x(f) = 2 \cdot X(f) \cdot U(f)}$ Contiene la misma info. que $x(t)$

$\boxed{a_x(t) = x(t) + j h_x(t)}$ $\boxed{h_x(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}}$ TH de $x(t)$

$\boxed{H_x(f) = X(f)\, \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = X(f) \cdot [-j\, \text{sign}(f)]}$

A través de un sist. L.I $\boxed{A_y(f) = 2U(f) \cdot Y(f) = A_x(f) H(f) = X(f) A_H(f) = \frac{1}{2} A_x(f) A_H(f)}$

- Propiedades de la Transf. de Hilbert

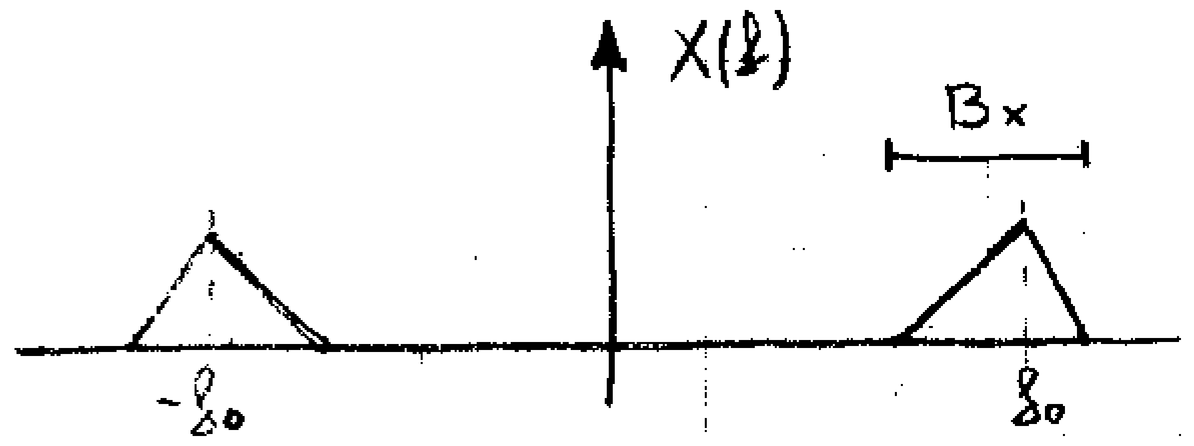
- Linealidad $TH\{x(t) + y(t)\} = TH\{x(t)\} + TH\{y(t)\}$
- Transf. de la Transf. $\boxed{x(t) = -TH\{h_x(t)\}}$
- Conservación de la autocorrelación y la dens. espectral (P_x, E_x tb)
- Convolución $h_x(t) * h_y(t) = -x(t) * y(t)$

- Representación fasorial de la señal analítica $a_x(t)$

$$a_x(t) = x(t) + j h_x(t) = e_x(t) \cdot e^{j\phi_x(t)}$$

- Envolvente de $x(t)$ $\boxed{e_x(t) = |a_x(t)| = \sqrt{x^2(t) + h_x^2(t)}}$
- Fase de $x(t)$ $\boxed{\phi_x(t) = \text{arctg} \frac{h_x(t)}{x(t)} = \text{Im}\{\ln(a_x(t))\}}$
- Frec. instantánea de $x(t)$ $\boxed{f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\phi_x(t))}$

+ SEÑALES PASO BANDA



$x(t)$ paso banda $\Rightarrow f_0 \gg B_x$

- Equivalente paso bajo

$$\boxed{B_x(f) = A_x(f+f_0)} \qquad \boxed{b_x(t) = a_x(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}}$$

$$b_x(t) = i_x(t) + j\, q_x(t)$$

- Componente en fase: $i_x(t) = x(t)\cos 2\pi f_0 t + h_x(t)\sin 2\pi f_0 t$
- Comp. en cuadratura: $q_x(t) = h_x(t)\cos 2\pi f_0 t - x(t)\sin 2\pi f_0 t$

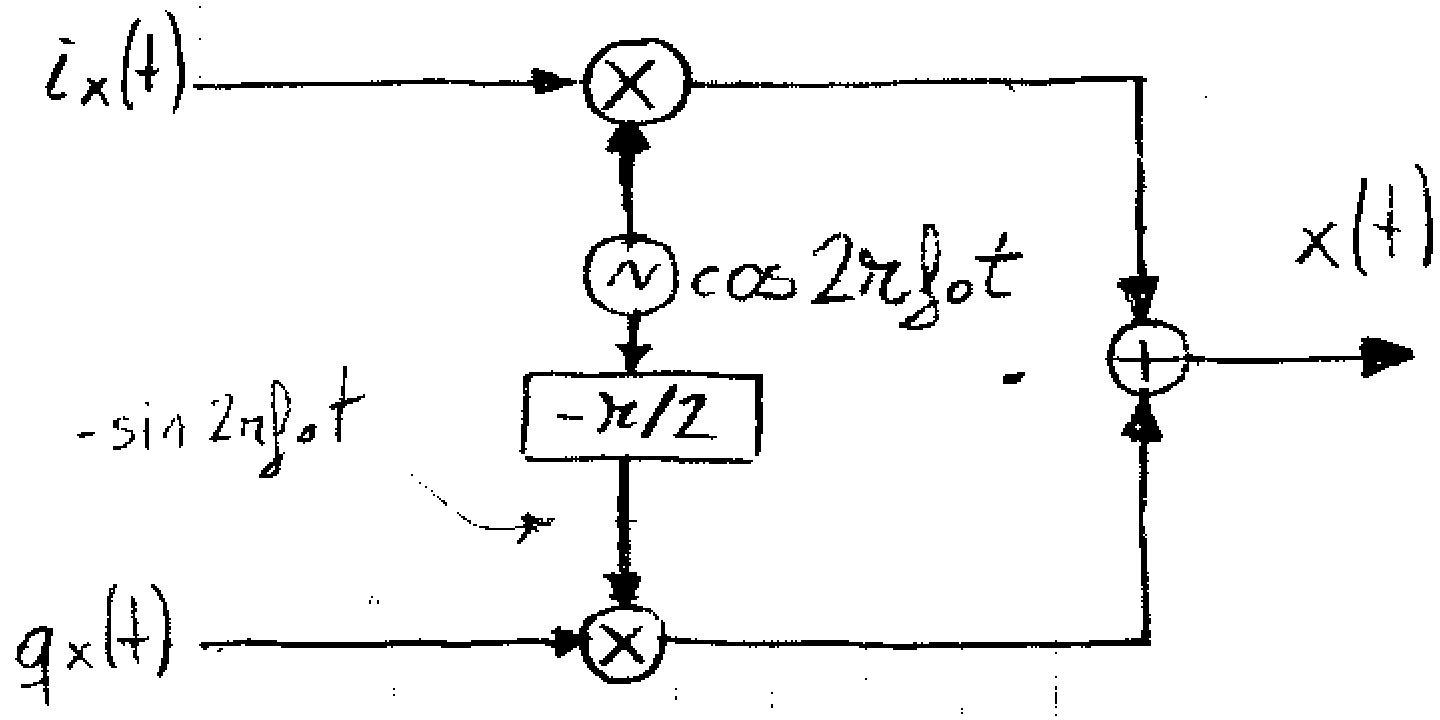
$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}\{a_x(t)\} = \mathrm{Re}\{b_x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = i_x(t)\cos 2\pi f_0 t - q_x(t)\sin 2\pi f_0 t}$$

$$h_x(t) = \mathrm{Im}\{a_x(t)\} = \mathrm{Im}\{b_x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = q_x(t)\cos 2\pi f_0 t + i_x(t)\sin 2\pi f_0 t$$

- Representación fasorial del eq. paso bajo $b_x(t)$

$$\boxed{e_{b_x}(t) = e_x(t)} \qquad \boxed{\varphi_{b_x}(t) = \phi_x(t) - 2\pi f_0 t}$$

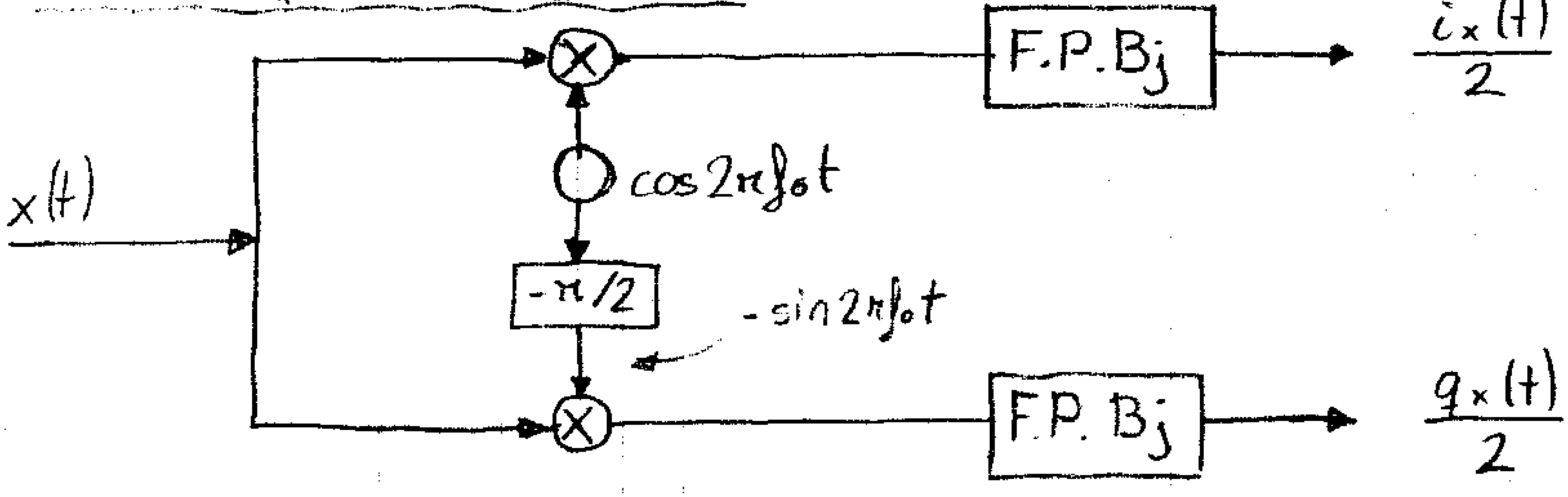
* MODULACIÓN COHERENTE



$x(t) = i_x(t)\cos 2\pi f_0 t - q_x(t)\sin 2\pi f_0 t$

$$\boxed{P_x = \frac{P_{i_x} + P_{q_x}}{2}}$$

* DEMODULADOR COHERENTE



- FILTRADO EQUIVALENTE PASO BAJO

$$\boxed{b_y(t) = a_x(t)\, e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{1}{2}\, b_x(t) * b_h(t)}$$

$$i_y(t) = 1/2 \left(i_x(t) * i_h(t) - q_x(t) * q_h(t) \right)$$

$$q_y(t) = 1/2 \left(i_x(t) * q_h(t) + q_x(t) * i_h(t) \right)$$

+ RETARDOS DE FASE Y DE GRUPO

Si consideramos una señal de banda estrecha $f_0 >> BW_x$ podemos hacer las aproximaciones en el canal:

$$|H(f)| \cong |H(f_0)| \qquad \Phi_H(f) \cong -2\pi f_0 \tau_F - 2\pi \tau_G (f - f_0)$$

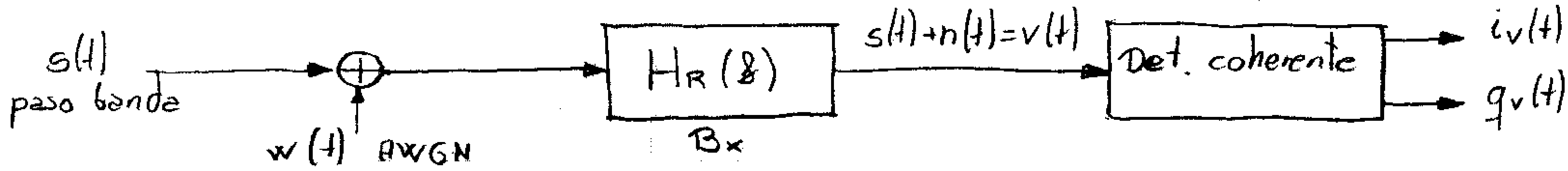
- Retardo de fase $\Rightarrow$ $\boxed{\tau_F = -\frac{\Phi_H(f_0)}{2\pi f_0}}$

- Retardo de grupo $\Rightarrow$ $\boxed{\tau_G = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\,\Phi_H(f)}{df}\Big|_{f = f_0}}$

$$\boxed{H(f) \cong |H(f_0)|\, e^{-j2\pi f_0 \tau_F} \cdot e^{-j2\pi (f - f_0)\tau_G}}$$

$$\boxed{y(t) = Re\left\{ |H(f_0)|\, b_x(t - \tau_G)\, e^{j2\pi f_0 (t - \tau_F)} \right\}}$$

+ RUIDO FILTRADO PASO BANDA



$$R_{q_n}(\tau) = R_{i_n}(\tau) \qquad R_{q_n i_n}(\tau) = -R_{i_n q_n}(\tau)$$

$$\boxed{S_{q_n}(f) = S_{i_n}(f) = S_n(f - f_0) + S_n(f + f_0)} \quad \text{para } |f| \le f_0$$

$$\boxed{S_{q_n i_n}(f) = -S_{i_n q_n}(f) = j\left[S_n(f - f_0) - S_n(f + f_0) \right]} \quad \text{para } |f| \le f_0$$

$$\boxed{P_n = P_{q_n} = P_{i_n}} = N_0 B$$

$$\boxed{P_{q_n i_n} = R_{q_n i_n}(0) = 0}$$

TEMA 5: MODULACIONES LINEALES

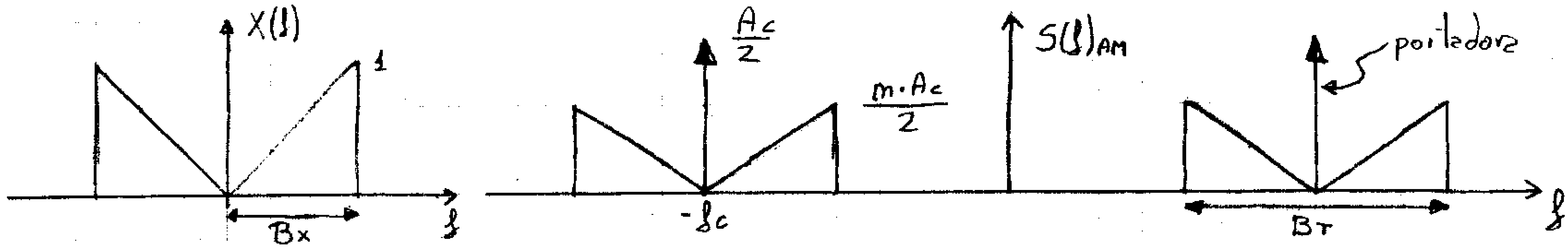
* MODULACIÓN DE AMPLITUD (AM)

$$\boxed{s(t)_{AM} = A_c[1 + m\cdot x(t)]\cos(2\pi f_c t)}$$

$x(t)$: señal paso bajo

$$\left.\begin{array}{l} i_s(t) = A_c[1 + m\cdot x(t)] \\ q_s(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{e_s(t)_{AM} = \left| A_c[1 + m\cdot x(t)] \right|}$$

- Para q. la señal se pueda recuperar detectando su envolvente esta ha de ser siempre positiva $\Rightarrow |x(t)| \le 1$; $m \le 1$



- Para poder transmitir en AM $E\{x(t)\} \equiv DC = 0$ ya que se mezclaría con la portadora.

$$\boxed{B_{T_{AM}} = 2B_x} \qquad \boxed{P_{S_{AM}} = \frac{A_c^2 + A_c^2 m^2 P_x}{2}} = \frac{P_{i_s} + P_{q_s}}{2}$$

- Eficiencia de la modulación

$$P_{S_{AM}} = P_C + 2P_{BL_{AM}}$$

P_c: potencia portadora
$P_{BL_{AM}}$: potencia bds laterales

$$\eta_{AM} = \frac{P_{BL}}{P_c} = \frac{m^2 P_x}{2\cdot(1 + m^2 P_x)} \qquad \boxed{\eta_{AM} \le 25\%} \text{ (muy pobre)}$$

* MODULACIONES DE PORTADORA SUPRIMIDA

- DBL (Doble bda lateral)

  - Idéntica a AM pero NO se envía la portadora

$$\boxed{s(t)_{DBL} = A_c x(t)\cos(2\pi f_c t)}$$

  - La señal NO se puede recuperar mediante un detector de envolvente

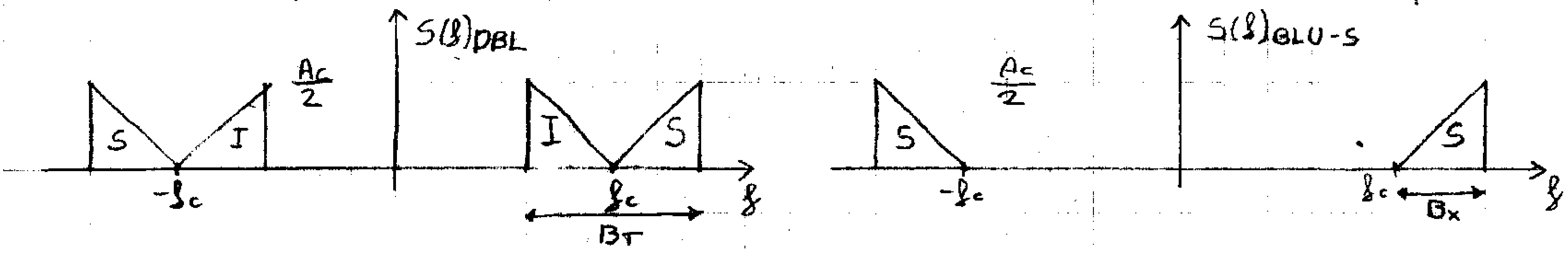
$$B_{T_{DBL}} = 2B_x \qquad P_{S_{DBL}} = \frac{P_{i_s}}{2} = \frac{A_c^2 P_x}{2} \equiv 2\cdot P_{BL}$$

$$\boxed{\eta_{DBL} = \frac{1}{2}} = 50\%$$

  - Permite enviar componente continua

- BLU (Banda lateral única)

- Enviamos únicamente una de las bds laterales de la señal DBL



$$\boxed{s_{BLU}(t) = \frac{A_c}{2}\left[x(t)\cos(2\pi f_c t) \mp h_x(t)\sin(2\pi f_c t)\right]}$$

BLU-S (−) BLU-I (+)

$$i_s(t)_{BLU} = \frac{A_c}{2}x(t) \qquad q_s(t)_{BLU} = \pm\frac{A_c}{2}h_x(t)$$

$$\boxed{B_{T_{BLU}} = B_x} \qquad \boxed{P_{S_{BLU}} = \frac{A_c^2}{4}P_x = P_{BL}} \Rightarrow \boxed{\eta_{BLU} = 1}$$

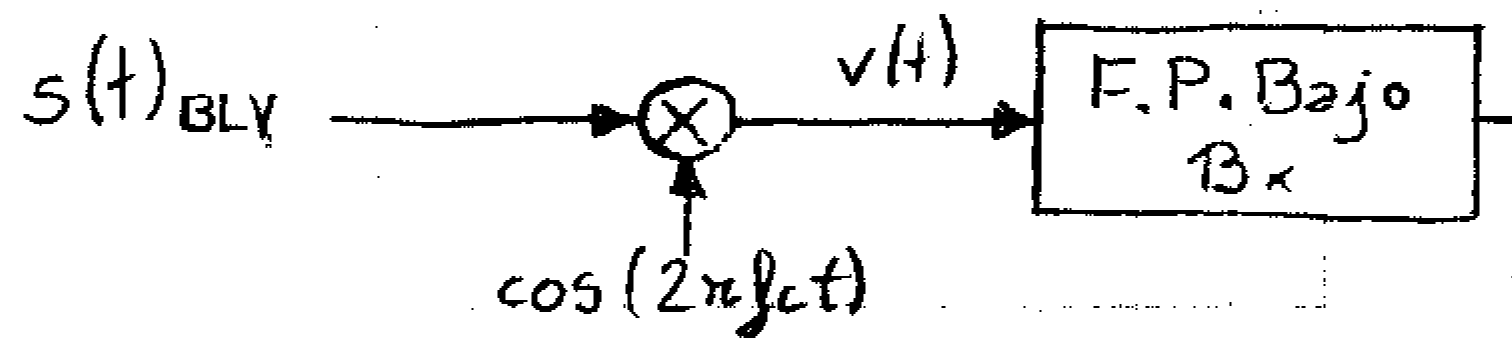
- No podemos enviar señales con componente continua, ya que el filtro BLU tendría q ser muy abrupto.

- BLV (Banda lateral vestigial)

- Es una modulación intermedia entre DBL y BLU, se envía una bda lateral y un vestigio de la otra, de esta forma podemos transmitir tb la componente continua.
- Para hacerlo filtramos la señal DBL con un filtro vestigial.

$$S(f)_{BLV-S} = S(f)_{DBL}\cdot H_v(f) = \frac{A_c}{2}\left[X(f-f_c)+X(f+f_c)\right]\cdot H_v(f)$$

- Y recibiremos su componente en fase mediante un detector coherente:



$$z(t) = \frac{i_x(t)}{2} = Cte\cdot x(t)$$

$$Z(f) = \frac{A_c}{4}X(f)\left[H_v(f-f_c)+H_v(f+f_c)\right]\Pi\left(\frac{f}{2B_x}\right) = \frac{I_s(f)_{BLV}}{2}$$

Para q $z(t) = Cte\cdot x(t) \Rightarrow \boxed{H_v(f-f_c)+H_v(f+f_c) = Cte\cdot x(t) \quad \text{en } (-B_x, B_x)}$

Como el filtro es real $\Rightarrow$ simetría vestigial respecto f_c

$$\boxed{H_v^*(f-f_c)+H_v(f+f_c) = Cte} \quad \text{en } (-B_x, B_x)$$

Si el filtro cumple esta simetría:

$$I_S(f)_{BLV} = \frac{A_c}{2} K \cdot X(f) \quad ; \quad Q_S(f)_{BLV} = \frac{A_c}{2} K\, X(f) \cdot G(f)$$

$$G(f) \approx H_Q(f) = -j\,\mathrm{sign}(f)$$

$$\boxed{s(t)_{BLV} \approx K \cdot s(t)_{BLU}} \qquad \boxed{P_{S_{BLV}} \approx K^2 \cdot P_{S_{BLU}}} \qquad \eta \approx 1$$

Exactamente: $G(f) = j\left[1 - \frac{1}{K} B_{H_V}(f)\right]$

$$P_{i_{S_{BLV}}} = \frac{A_c^2 K^2}{4} \cdot P_x \quad ; \quad P_{q_{S_{BLV}}} = \frac{A_c^2 K^2}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \cdot |G(f)|^2 \, df \qquad \boxed{\eta = 95\text{-}99\%}$$

- BLV + portadora (usado en TV)

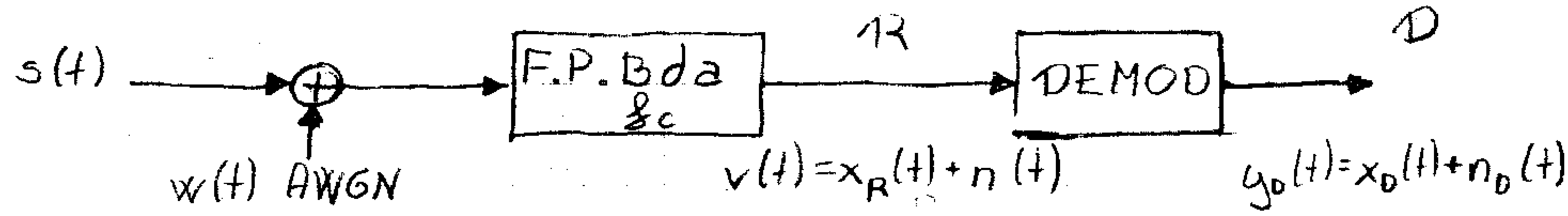
- Se puede demodular con un detector de envolvente.

$$\boxed{s(t)_{BLV+P} \approx A_c\left[1 + m \cdot x(t)\right] \cos(2\pi f_c t) \underbrace{\mp}_{\text{BLV-I} \,/\, \text{BLV-S}} A_c\, m \cdot h_x(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)}$$

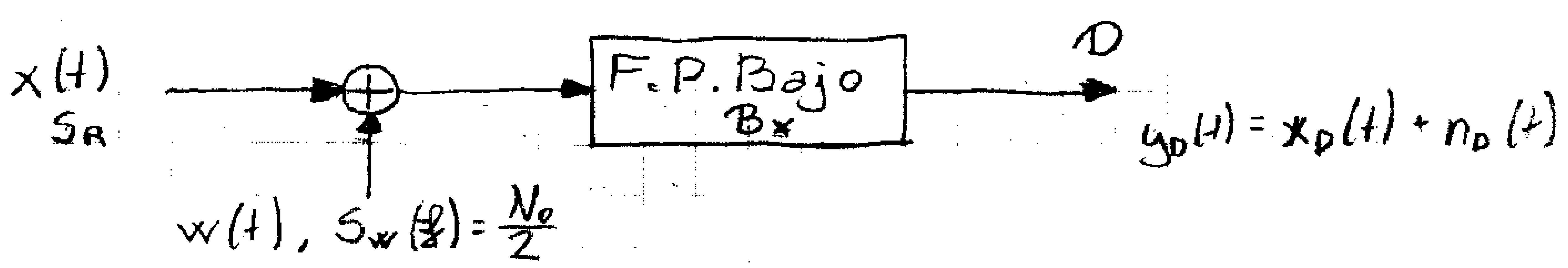
$$\boxed{P_{S_{BLV+P}} \approx \frac{A_c^2}{2} + A_c^2 m^2 \cdot P_x}$$ eficiencia menor a una BLV

* RUIDO EN MODULACIONES LINEALES

Esquema de recepción:



- Para comparar las diferentes modulaciones nos fijaremos en una SNR_D de referencia, que sería la que tendríamos si transmitiéramos $x(t)$ en bda base.



$$SNR_D = \frac{S_D}{N_D} = \frac{S_R}{N_0 B_x} = \gamma$$

- AM con detector coherente

$$\gamma = \frac{S_R}{N_o B_x} = \frac{A_c^2(1+m P_x^2)}{N_o 2 B_x}$$

$$SNR_{D,AM} = \frac{S_D}{N_D} = \frac{A_c^2 m^2 \cdot P_x}{N_o 2 B_x} = \frac{m^2 P_x}{1+m^2 P_x}\gamma \leq \frac{1}{2}\gamma$$

- Con detector de envolvente IDEM $\Leftrightarrow SNR_R \geq 10\,dB$

- DBL con detector coherente

$$\gamma = \frac{S_R}{N_o B_x} = \frac{A_c^2 P_x}{N_o 2 B_x} \qquad SNR_{D,DBL} = \frac{S_D}{N_D} = \gamma$$

- BLU con detector coherente

$$\gamma = \frac{S_R}{N_o B_x} = \frac{A_c^2 P_x}{N_o 4 B_x} \qquad SNR_{D,BLU} = \frac{S_D}{N_D} = \gamma$$

- BLV con detector coherente

$$\gamma = \frac{S_R}{N_o B_x} \approx \frac{A_c^2 P_x}{N_o 4 B_x}$$

$$SNR_{D,BLV} = \frac{S_D}{N_D} = \frac{A_c^2 \cdot P_x}{N_o 4 (B_x + B_V)} \approx \frac{B_x}{(B_x + B_V)}\gamma$$

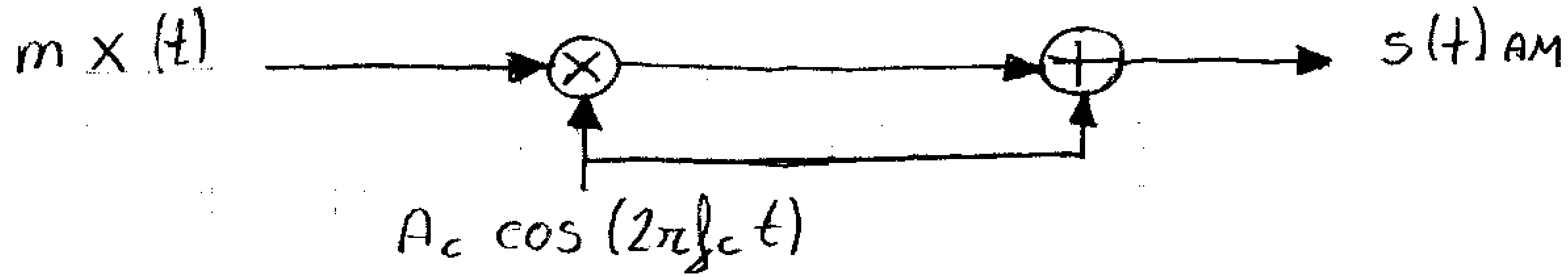
- BLV + P con detector coherente

$$\gamma = \frac{S_R}{N_o B_x} \approx \frac{A_c^2(1+2m^2 P_x)}{N_o 2 B_x}$$

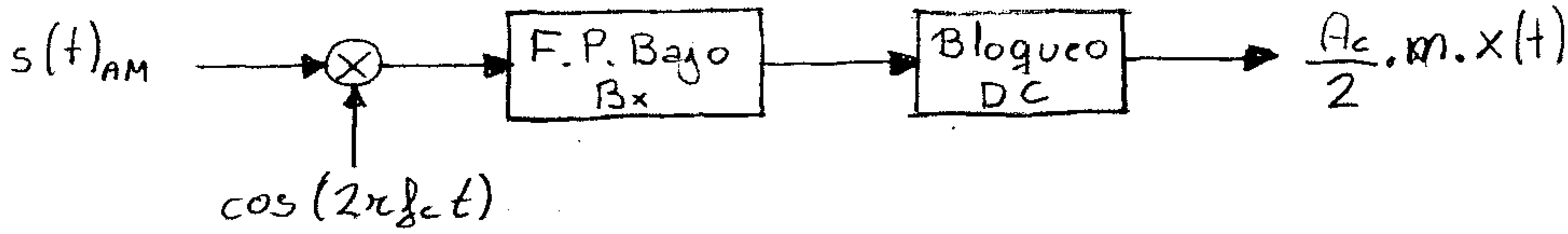
$$SNR_{D,BLV+P} = \frac{A_c^2 m^2 P_x}{N_o (B_x + B_V)} \approx \frac{B_x}{B_x + B_V} \cdot \frac{2m^2 P_x}{(1+2m^2 P_x)}\gamma$$

* MODULADORES - DEMODULADORES DE AM

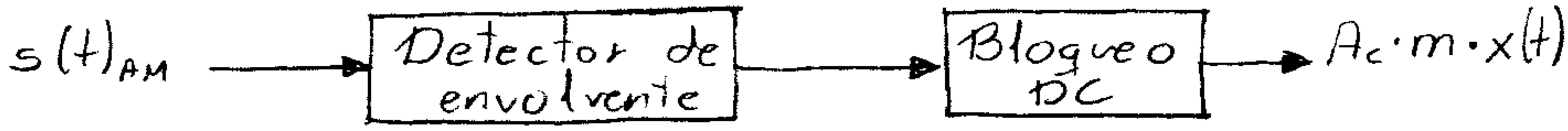
- Multiplicador directo



- Demodulador coherente

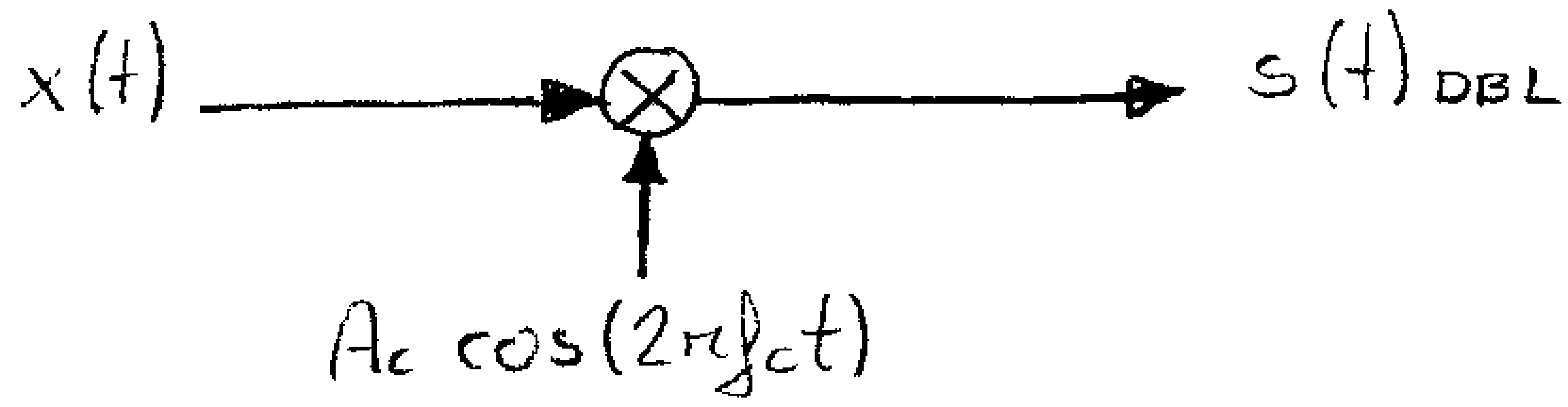


- Detector por envolvente



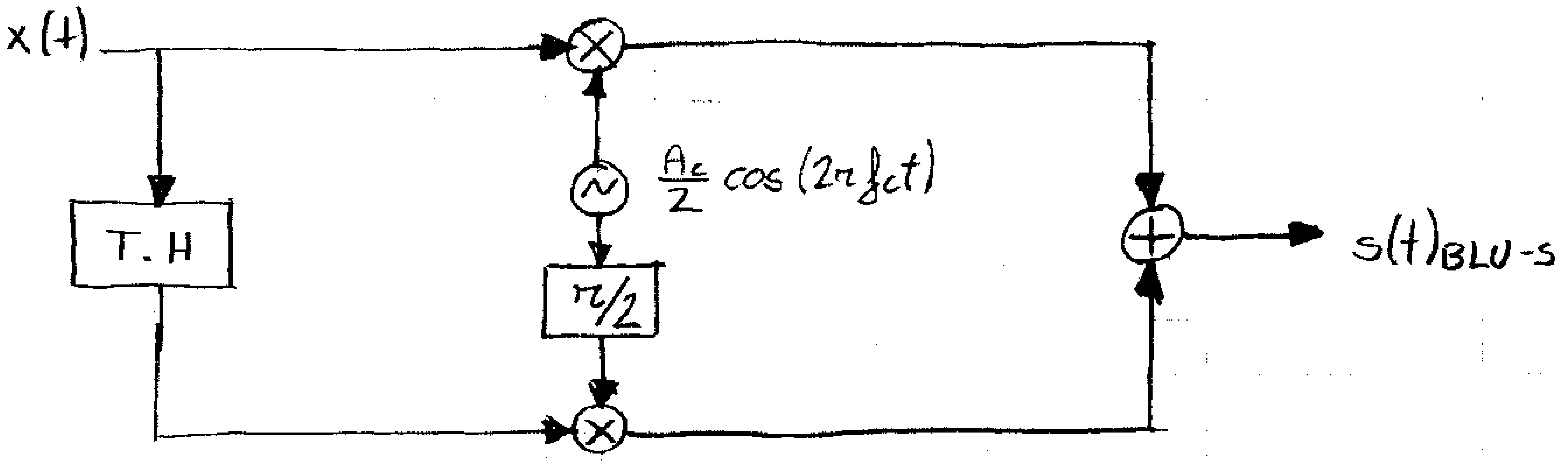
* MOD - DEMOD DBL

- Multiplicador directo

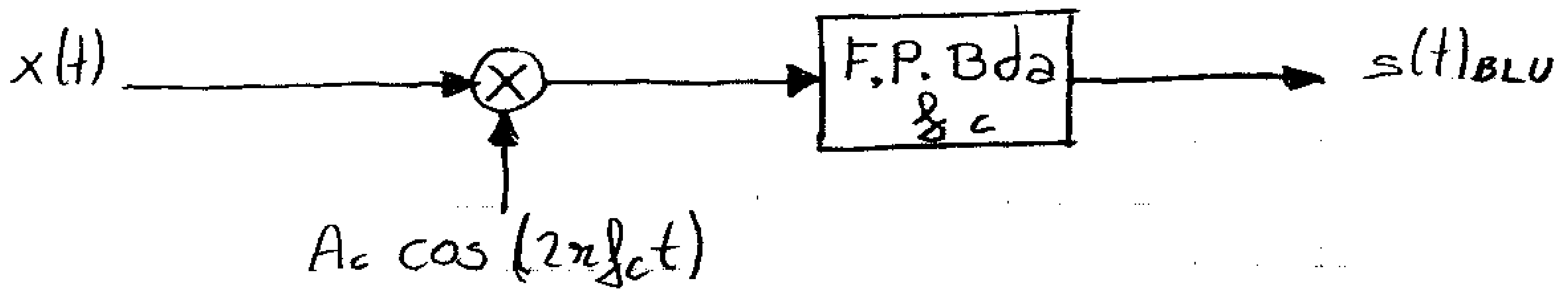


* MOD - DEMOD BLU

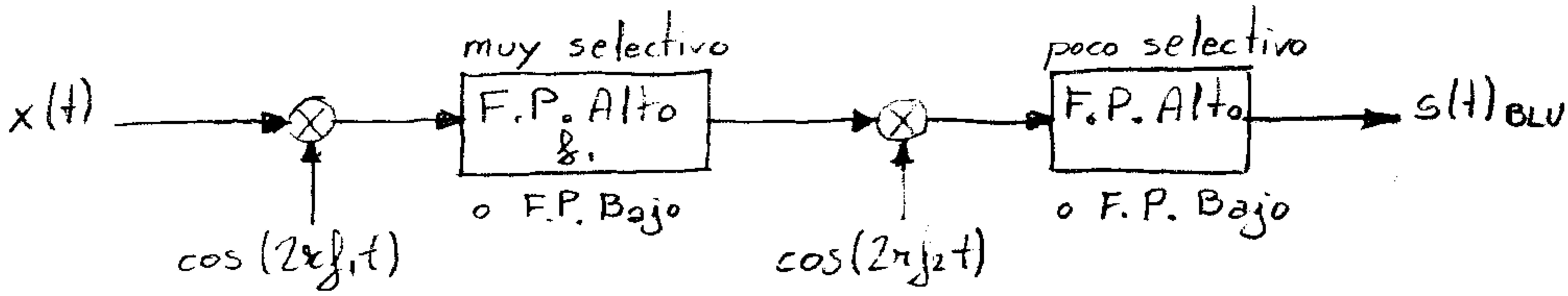
- Discriminador de fase (MOD)



- Modulador DBL + Filtro

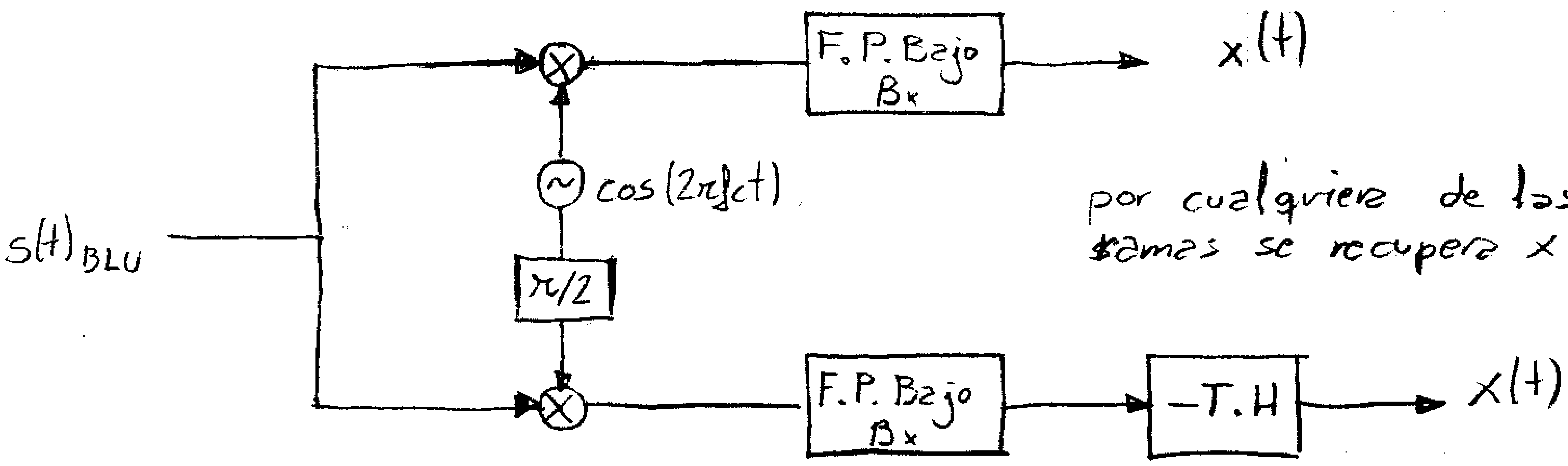


- Modulador en doble etapa



$f_1 << f_2 \quad ; \; f_c = f_1 + f_2$

- Demodulador coherente



por cualquiera de las dos ramas se recupera x(t)

TEMA 6: MODULACIONES ANGULARES

$$s(t) = A_c \cos \theta_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

- fase relativa : $\phi(t)$
- fase instantanea : $\theta(t) = 2\pi f_c t + \phi(t)$
- frecuencia instantánea : $f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta_c(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t)$

* MODULACIÓN DE FASE (PM)

$$\phi(t) = \phi_\Delta \cdot x(t) = \{-\pi, \pi\} \Rightarrow \boxed{s(t)_{PM} = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_\Delta \cdot x(t))}$$

ϕ_Δ : cte de sensibilidad de fase [rad/V] $\quad \phi_\Delta < \pi$

* MODULACIÓN DE FRECUENCIA (FM)

$$\phi(t) = 2\pi \int_{-\infty}^{t} f_\Delta \cdot x(\lambda)\, d\lambda$$

f_Δ : sens. en frecuencia [Hz/V]

$$\boxed{s(t)_{FM} = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int^{t} x(\lambda)\, d\lambda\right)}$$

- Los dos tipos de modulaciones son equivalentes, entre ellas existe una relación de diff-int de la señal.

* MODULACIÓN FM DE BDA ESTRECHA (NBFM) (NBPM)

Si $\boxed{|\phi(t)| < 0'3 \text{ rad}}$ $\quad \cos \phi(t) \approx 1 \; ; \sin \phi(t) \approx \phi(t)$

$$\boxed{s(t)_{NBFM \text{ o } NBPM} \approx A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \phi(t) \sin 2\pi f_c t}$$

Es la mod. angular con un menor BW $\boxed{B_T = 2B_x}$

- Potencia de las señales

$$P_S = \frac{P_{is} + P_{qs}}{2} = \frac{E\{A_c^2 \cos^2 \phi(t)\} + E\{A_c^2 \sin^2 \phi(t)\}}{2} = \frac{A_c^2}{2} \equiv P_c$$

La potencia de la señal és la misma que la de la portadora.

* MODULACIÓN ANGULAR DE UN TONO (f_m)

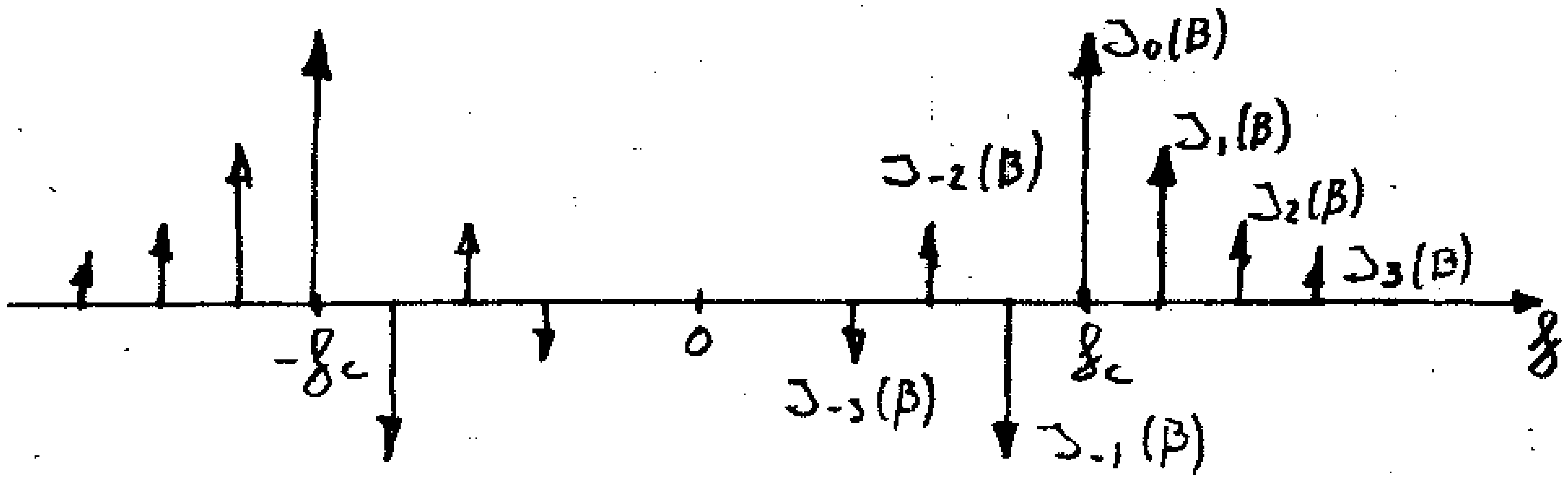
$\phi(t) = \beta \sin(2\pi f_m t)$ $\qquad \beta$: indice de modulación

- **PM** $\Rightarrow x(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$ $\qquad \boxed{\beta = A_m \phi_\Delta}$
- **FM** $\Rightarrow x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ $\qquad \boxed{\beta = f_\Delta \frac{A_m}{f_m}}$

$$\boxed{s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin 2\pi f_m t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{s(t) = A_c \sum_n J_n(\beta) \cos(2\pi f_c t + 2\pi n f_m t)}$$



$J_n(\beta) = J_{-n}(\beta)(-1)^n$

$J_n(\beta)$ decreciente con 'n'

- Tenemos infinitas rayas espectrales, nos quederemos solo con las más significativas.

* BW DE TRANSMISIÓN EN MODULACIONES ANGULARES

- Regla de Carson

$\beta < 0'3$	$0'3 < \beta < 1$	$1 < \beta < 10$	$\beta > 10$
$n_{max} = 1$	ver tablas	$n_{max} = \beta + 2$	$n_{max} = \beta$

$$\boxed{B_T = 2\, n_{max} \cdot f_m}$$

- Si en lugar de un tono tenemos una señal con un ancho de banda B_x, cogemos $f_m = B_x$, siendo válido todo lo anterior.

- Moduladores de FM y PM

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{MODULADOR FM ó PM}} \longrightarrow s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

$$\uparrow A_c \cos(2\pi f_c t)$$

- Demoduladores de FM y PM

$$s(t) \longrightarrow \boxed{\text{LIMITADOR}} \xrightarrow{(1)} \boxed{\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(\ )} \xrightarrow{(2)} \boxed{\text{Det. envolvente}} \xrightarrow{(3)} \boxed{-DC} \longrightarrow x_o(t)$$

<u>Demod FM</u> : $x_D(t) = K f_\Delta x(t)$

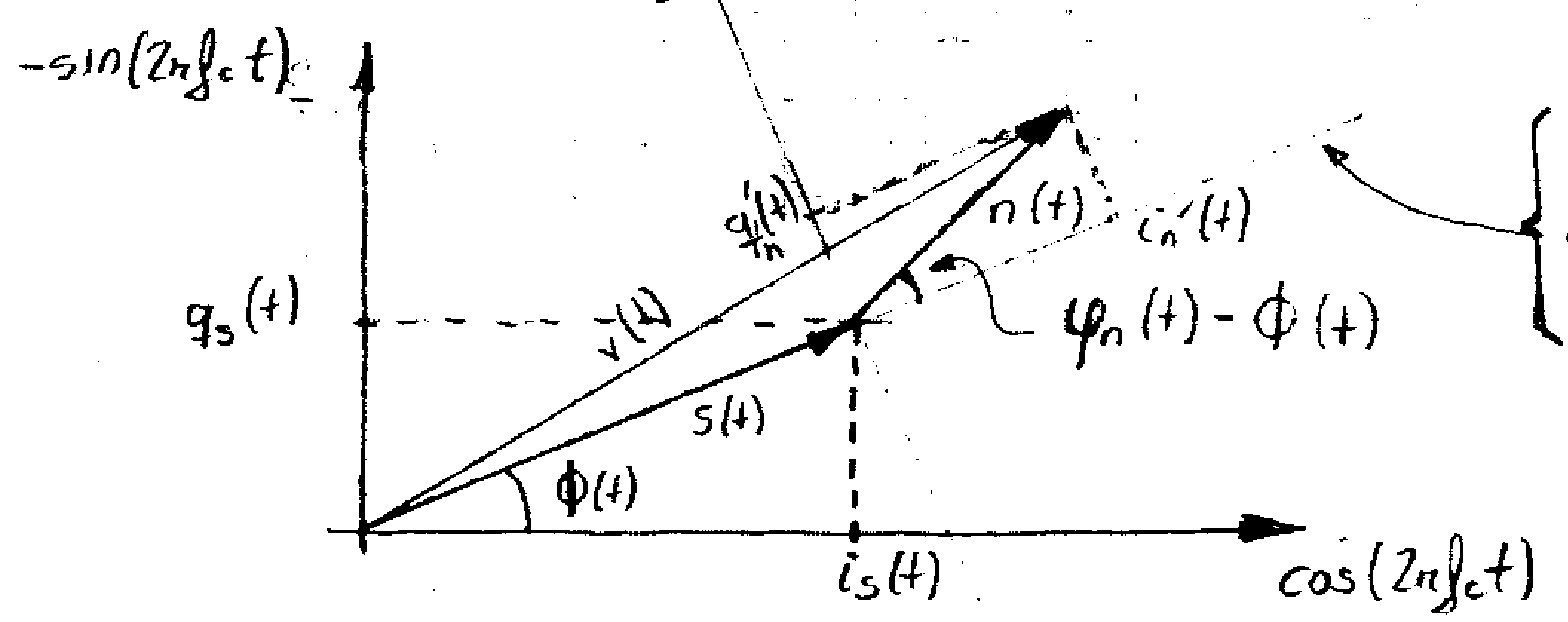
* <u>RUIDO EN MODULACIONES ANGULARES</u>

$$s(t) \longrightarrow \oplus \longrightarrow \boxed{\text{F.P.Bda } B_T} \xrightarrow{R} \boxed{\text{LIMIT.}} \longrightarrow \boxed{\text{DEMOD}} \longrightarrow \boxed{\text{F.P.Bajo } B_x} \xrightarrow{D}$$

$w(t)$ $\quad$ $v(t) = s(t) + n(t)$ $\quad$ $y_D(t) = x_D(t) + n_D(t)$

$$\boxed{SNR_R = \frac{S_R}{N_R} = \frac{A_c^2/2}{N_o B_T} = \frac{B_x}{B_T}\gamma} \qquad \gamma = \frac{S_R}{N_o B_x}$$

$$v(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) + i_n(t)\cos(2\pi f_c t) - q_n(t)\sin(2\pi f_c t)$$



realizando un canvio de coord. de $\cos(2\pi f_c t)$ a $\cos(2\pi f_c t + \phi(t))$

$$v(t) = e_v(t)\cos\left(2\pi f_c t + \phi(t) + \operatorname{arctg}\left\{\frac{q_n'(t)}{A_c + i_n'(t)}\right\}\right) = \left\{\begin{array}{l} SNR_R > 10\,dB \\ A_c >> i_n'(t), q_n'(t) \end{array}\right\} =$$

$$\boxed{v(t) = e_v(t)\cos(2\pi f_c t + \phi_v(t)) \ ; \ \phi_v(t) \approx \phi(t) + \frac{q_n(t)}{A_c}}$$

- Obtención de la SNR_D en PM ($SNR_R > 10dB$)

$$y_D(t) = \phi_v(t) * h_{F.P.B_j}(t) = \phi_\Delta x(t) + \frac{1}{A_c} q_n(t) * h_{FP.B_j}(t) = x_D(t) + n_D(t)$$

$$S_D = E\{x_D^2(t)\} = \phi_\Delta^2 P_x$$

$$N_D = \int S_{n_D}(f)df = \frac{1}{A_c^2}\int S_{q_n}(f)|H_{F.P.B_j}(f)|^2 df = \frac{N_0 2 B_x}{A_c^2}$$

$$\boxed{SNR_{D,PM} = \frac{S_D}{N_D} = \frac{A_c^2 \phi_\Delta^2 P_x}{2N_0 B_x} = \phi_\Delta^2 P_x \gamma}$$

- En el mejor de los casos $P_{max} = 1$, $\phi_\Delta = \pi \Rightarrow SNR_{D,PM} = 10dB$

- Obtención de la SNR_D en FM

$$y_D(t) = \left[\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\phi_v(t)\right] * h_{F.P.B_j}(t) = f_\Delta x(t) + \frac{1}{2\pi A_c}\left[\frac{d}{dt} q_n(t)\right] * h_{FP.B_j}(t)$$

$$S_D = E\{x_D(t)\} = f_\Delta^2 P_x$$

$$N_D = \int S_{n_D}(f)df = \frac{2N_0 B_x^3}{3A_c^2}$$

$$\boxed{SNR_{D,FM} = \frac{3A_c^2 f_\Delta^2 P_x}{2N_0 B_x^3} = 3\frac{f_\Delta^2 P_x}{B_x^2}\gamma}$$

si $|x(t)|_{max} = 1 \Rightarrow \boxed{SNR_{D,FM} = 3\beta^2 P_x \gamma}$

- Podemos aumentar la ganancia respecto banda base tanto como queramos aumentando $\beta \Rightarrow$ Ancho de banda B_T

▵ Efecto umbral en FM ($SNR_R \leq 10dB$)

$$\gamma_{th} = \frac{B_T}{B_x} SNR_{Rth} = \frac{B_T}{B_x}\cdot 10 = \frac{2\cdot M(\beta) B_x}{B_x}\cdot 10 = 20M(\beta)$$

si $1 < \beta < 10 \Rightarrow M(\beta) = \beta + 2$

$$\Rightarrow SNR_{Dth} = 60 P_x \beta^2(\beta+2)$$