TEMA 1.2: ECS. DE MAXWELL EN EL VACIO

* FUENTES Y CAMPOS

Eléctrico

[N] $$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}\cdot\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}}$$ Ley de Coulomb

[N/C] $$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$ Para más de una carga se aplica superposición.

Distribuciones de carga: $\boxed{\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{dS}}$ [C/m²] $\boxed{\rho(\vec{r}) = \frac{\partial q}{\partial V}}$ [C/m³]

Magnético

[A] $$\boxed{I\Big|_S = -\frac{dq}{dt}\Big|_S = \int_S \vec{J}(\vec{r})\,d\vec{S}}$$ Intensidad de corriente

[A/m²] $$\boxed{\vec{J}(\vec{r}) = N q_p \vec{v}(\vec{r}) = \sigma\vec{E}(\vec{r})}$$ Densidad volúmica de carga

portadores por m³ — velocidad portadores — conductividad del medio

[T] $$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I\,d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\boxed{\vec{F}_M = q\vec{v}\times\vec{B}_{ext}}$$ Ley de Biot y Savart

* ECS. DE MAXWELL EN MEDIOS MATERIALES

- Dielectricos: $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \overset{*}{=} \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}}$
- Magnéticos: $\boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \overset{*}{=} \mu_0(\vec{H}+\chi_m\vec{H}) = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}}$

* en medios lineales, homogeneos e isótropos

- Conductores: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$
  - Dentro del conductor siempre $\vec{E} = 0 \Rightarrow \Phi_E = cte$
  - La carga se encuentra unicamente en la superficie $\sigma(\vec{r})$
  - El campo eléctrico es siempre $\perp$ a la superficie

▲ En medios materiales, se ha de sustituir ε_0 y μ_0 de las ecuaciones de Maxwell por ε, μ del medio y tener en cuenta únicamente las cargas libres.

* Ecs. Fundamentales del electromagnetismo

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q|_S}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$$

$$f.e.m = \boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\phi_M} \qquad \boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}}$$

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0\left(I|_S + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\phi_E\right)} \qquad \boxed{\nabla\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{d}{dt}\vec{E}\right)}$$

$$I|_S = \boxed{\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}Q} \qquad \boxed{\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{d}{dt}\rho}$$

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}\times\vec{B}(\vec{r},t)\right)}$$

– Teoremas matemáticos usados

Tª de la divergencia : $\boxed{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}\, dV}$

Tª del rotacional : $\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{A}\, d\vec{S}}$

* Potenciales

Eléctrico

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = -\int_C \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l}} \qquad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})}$$

$$\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Puntos donde no hay carga $\Rightarrow \nabla^2\phi = 0$

Magnético

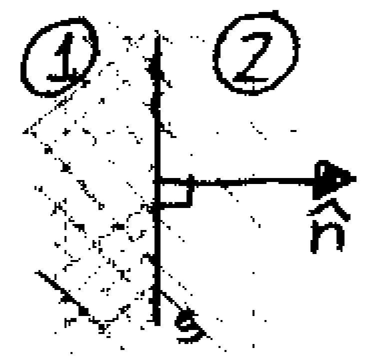
$$\boxed{\nabla\times\vec{A} = \vec{B}} \qquad \boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}} \qquad \boxed{\nabla\cdot\vec{A} = 0}$$

* CONTINUIDAD DE LOS CAMPOS (Cond. de contorno)

comp. normal: $\boxed{\hat{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\big|_s = \sigma}$ $\boxed{\hat{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\big|_s = 0}$

comp. tangencial: $\boxed{\hat{n}\times(\vec{E}_2 - E_1)\big|_s = 0}$ $\boxed{\hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\big|_s = \vec{J}_s}$

Campos eléctricos — Campos Magnéticos



* CAPACIDAD Y ENERGÍA ELÉCTRICA

$$\boxed{Q = C\cdot\Delta\Phi = C\cdot V} \qquad \boxed{U_E = 1/2\,\varepsilon\int_V |\vec{E}|^2 dv = 1/2\, C V^2}$$

CONDENSADORES :

Plano	Cilíndrico	Esférico
$C = \varepsilon \frac{S}{d}$	$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}\,\ell$	$C = \frac{4\pi\varepsilon}{1/a - 1/b}$

* INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA

$$\boxed{L = \frac{d\Phi_M}{dI}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d\Phi_{M1} &= L_1\, dI_1 + M_{12}\, dI_2 \\ d\Phi_{M2} &= L_2\, dI_2 + M_{21}\, dI_1 \end{aligned}}$$

$M_{12} = M_{21}$ Coef. de induc mutua

$$\boxed{U_M = \frac{1}{2}\mu\int_V |\vec{H}|^2 dv = \frac{1}{2} L I^2}$$

* ENERGÍA DE LOS CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Potencia disipada

$$\boxed{-\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\, dv = \int_V \frac{dU}{dt}\, dv + \oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}}$$

$$\boxed{U = U_e + U_m = 1/2\,\varepsilon|\vec{E}|^2 + 1/2\,\mu|\vec{H}|^2}$$

Densidad volumica de energia

$$\boxed{\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H}}$$

Vector de Poynting

- Energia por unidad de tiempo y superficie que se propaga
- Dirección de propagación de la energia

* Ecs. de Maxwell en R.S.P.

Campo instantaneo : $\vec{\mathcal{E}}_i(\vec{r},t) = E_{oi}(\vec{r})\cos(\omega t + \theta_{E_i}(\vec{r}))$ $\quad i = x, y, z$

Fasor : $\vec{E}_i(\vec{r}) = E_{oi}(\vec{r})\, e^{j\theta_{E_i}(\vec{r})}$

$$\boxed{\mathcal{E}_i(\vec{r},t) = \mathcal{R}e\{\vec{E}_i(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}\}}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E} = -j\omega\vec{B}}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{B} = \mu_o\vec{J} + j\omega\mu_o\varepsilon_o\vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}}_m = 1/2\,\mathcal{R}e\{\vec{E}\times\vec{H}^*\}}$$

TEMA 3: ONDAS PLANAS UNIFORMES

* ECS. DE ONDA (Medios lineales, homogéneos, isótropos y sin fuentes)

$$\boxed{\nabla^2\vec{\mathcal{E}} - \mu\varepsilon \frac{d^2\vec{\mathcal{E}}}{dt^2} = 0} \qquad \boxed{\nabla^2\vec{\mathcal{H}} - \mu\varepsilon \frac{d^2\vec{\mathcal{H}}}{dt^2} = 0}.$$

- En R.S.P.

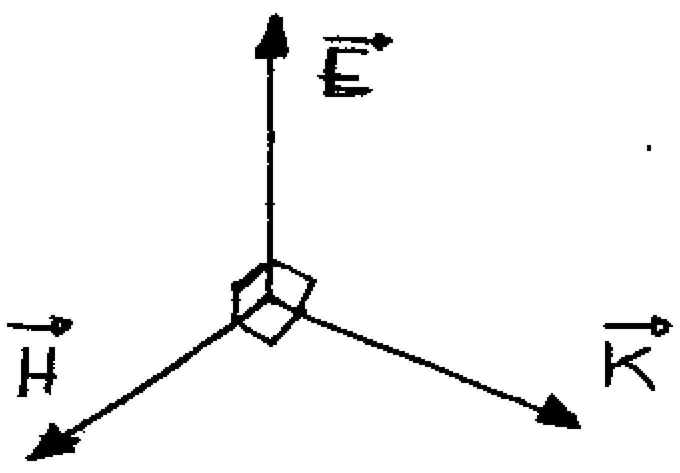
$$\boxed{\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0} \qquad \boxed{\nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0}$$

núm. de onda $\boxed{k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$

- Solución a las ec. de onda en R.S.P.

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c\, e^{-j\vec{k}\vec{r}} = \eta\, \vec{H}(\vec{r}) \times \hat{k}}$$

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_c\, e^{-j\vec{k}\vec{r}} = \frac{1}{\eta}\, \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r})}$$



$\vec{H} \perp \vec{K}$; $\vec{E} \perp \vec{K}$; $\vec{E} \perp \vec{H}$

$\vec{K} = k\hat{k}$ $\quad \hat{k}$: Sentido de propagación de la onda

$\boxed{\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}}$ Impedancia intrínseca del medio $\quad \eta_0 = 120\pi\ \Omega$

$\boxed{\lambda = 2\pi/k = c/f}$ Longitud de onda

- Potencia transportada por la onda

$$\boxed{\vec{P}_m = \frac{1}{2\eta}|\vec{E}|^2\hat{k} = \frac{1}{2}\eta|\vec{H}|^2\hat{k}}$$

• Onda plana ⇒ los frentes de onda son planos paralelos.

frentes de onda : ptos tq $\vec{k}\cdot\vec{r} = Cte$

* POLARIZACIÓN DE LAS ONDAS PLANAS (En R.S.P.)

La solución más general de $\vec{E}$ para una onda plana es:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = (\hat{e}_1 E_{01} + \hat{e}_2 E_{02})\, e^{-j\vec{k}\vec{r}}} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2 \\ \hat{e}_1 \times e_2 = \hat{k}\end{array}}$$

con : $E_{01} = |E_{01}|\, e^{j\varphi_1}$; $E_{02} = |E_{02}|\, e^{j\varphi_2}$; $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = |E_{01}| e^{j\varphi_1} \left(\hat{e}_1 + \frac{|E_{02}|}{|E_{01}|} e^{j\Delta\varphi}\right) e^{-j\vec{k}\vec{r}} = C\,(\hat{e}_1 + p\, e^{j\Delta\varphi} \hat{e}_2)\, e^{-j\vec{k}\vec{r}}}$$

Las componentes $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ de $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$ describen una elipse.

- Sentido de giro de la elipse de polarización.

  $-\pi < \Delta\varphi < 0$ "a derechas"

  $0 < \Delta\varphi < \pi$ "a izquierdas"

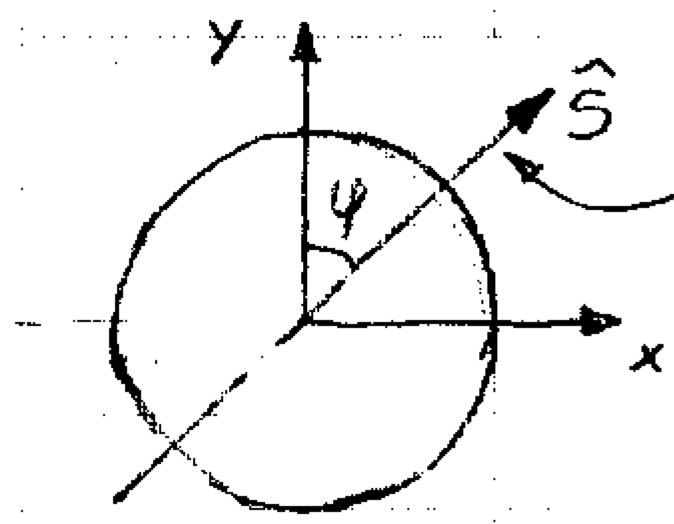
- Polarización lineal $\Leftrightarrow$ ($p = 0$ ó ∞) ó ($\Delta\varphi = 0$ ó $\pm\pi$)
- Polarización circular $\Leftrightarrow$ ($p = 1$) y ($\Delta\varphi = \pm\pi/2$)

▲ Cualquier onda plana puede expresarse como combinación de dos ondas con polarizaciones ortogonales.

- Pol. lineal $\rightarrow$ $\vec{E}_1(\vec{r}) = C\hat{e}_1\, e^{-j\vec{k}\vec{r}}$; $\vec{E}_2(\vec{r}) = C p\, e^{j\Delta\varphi} \hat{e}_2\, e^{-j\vec{k}\vec{r}}$
- Pol. circular $\begin{cases} \vec{E}_1(\vec{r}) = C/2\,(1 - jp\,e^{j\Delta\varphi})(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2)\, e^{-j\vec{k}\vec{r}} \\ \vec{E}_2(\vec{r}) = C/2\,(1 + jp\,e^{j\Delta\varphi})(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)\, e^{-j\vec{k}\vec{r}} \end{cases}$

* ELEMENTOS PARA EL CONTROL DE LA POLARIZACIÓN

- Polarizador

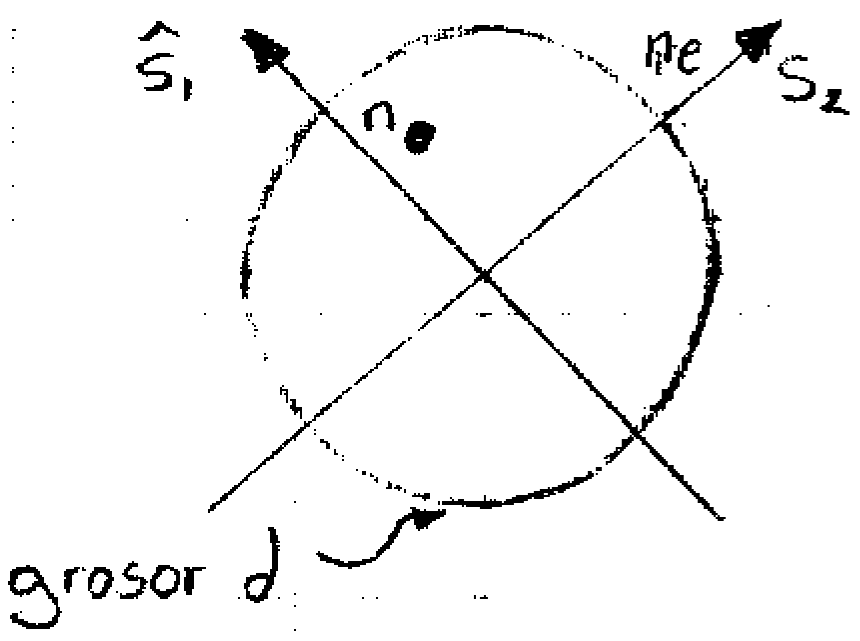


eje del polarizador

- Solo deja pasar la componente del campo paralela a su eje.

$$\boxed{\vec{E}_{out} = (\vec{E}_{in} \cdot \hat{S})\,\hat{S}}$$

- Lamina de retardo



- Transforman la polarización de la onda incidente sin alterar su potencia.

$$\boxed{\vec{E}_{out} = (\vec{E}_{in} \cdot \hat{S}_1)\,\hat{S}_1\, e^{-jkn_o d} + (\vec{E}_{in} \cdot \hat{S}_2)\,\hat{S}_2\, e^{-jkn_e d}}$$

- Desfase diferencial introducido $\boxed{\Delta\varphi_{lam} = K(n_o - n_e)d}$

- Tipos de láminas $\begin{cases} \text{de } \lambda/4 \Rightarrow \Delta\varphi_{lam} = \pi/2 \\ \text{de } \lambda/2 \Rightarrow \Delta\varphi_{lam} = \pi/4 \end{cases}$

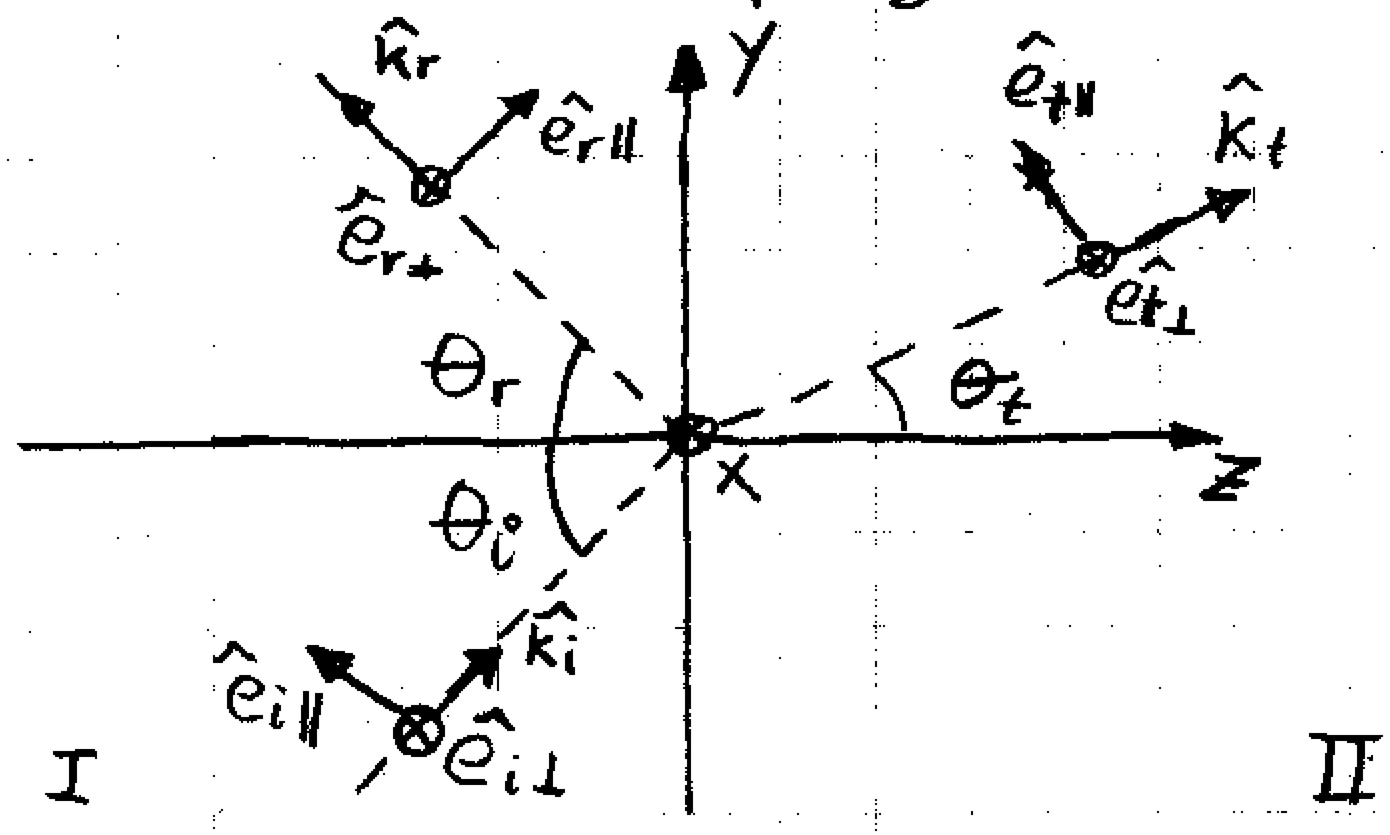
* PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS EN MEDIOS CON PERDIDAS

Cosas demasiado raras y difíciles para aprenderselas

TEMA 4 INCIDENCIA DE ONDAS PLANAS SOBRE MEDIOS MATERIALES

* LEYES DE SNELL

1ª.- Las ondas incidente, reflejada y transmitida (si la hay) deben estar contenidas en el mismo plano, perpendicular a la superficie.



$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_{oi}\, e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)}$$
$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_{or}\, e^{-jk_1(\sin\theta_r y + \cos\theta_r z)}$$
$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_{ot}\, e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)}$$

2ª $\boxed{\theta_r = \theta_i}$

3ª $\boxed{n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t}$

mat. no magnet.

$$n \equiv \frac{c}{v} = \frac{K}{K_0} \overset{\downarrow}{=} \sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\eta_0}{\eta}$$

* ECUACIONES DE FRESNEL (medios no magnéticos)

$$\boxed{\rho_\perp = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}} \qquad \boxed{\rho_\parallel = \frac{n_1\cos\theta_t - n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}}$$

$$\boxed{\tau_\perp = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}} \qquad \boxed{\tau_\parallel = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}}$$

$E_{or\perp} = \rho_\perp E_{oi\perp}$ $\qquad E_{or\parallel} = \rho_\parallel E_{oi\parallel}$ $\qquad \tau = 1 + \rho$

$E_{ot\perp} = \tau_\perp E_{oi\perp}$ $\qquad E_{ot\parallel} = \tau_\parallel E_{oi\parallel}$

- Caso más general: onda incidente polarizada elípticamente

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}_{i\perp} = (E_{oi\parallel}\,\hat{e}_{i\parallel} + E_{oi\perp}\,\hat{e}_{i\perp})\, e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}}$$

* ANGULO DE BREWSTER (Reflexión nula)

- Pol. Paralela: $\rho_\parallel = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_{iB} = \operatorname{arctg} n_2/n_1}$

- Pol. Perpendicular: no existe angulo tq $\rho_\perp = 0$

* ÁNGULO CRÍTICO (Reflexión total)

$$\boxed{\theta_{ic} = \arcsin n_2/n_1}$$ Potencia transmitida nula

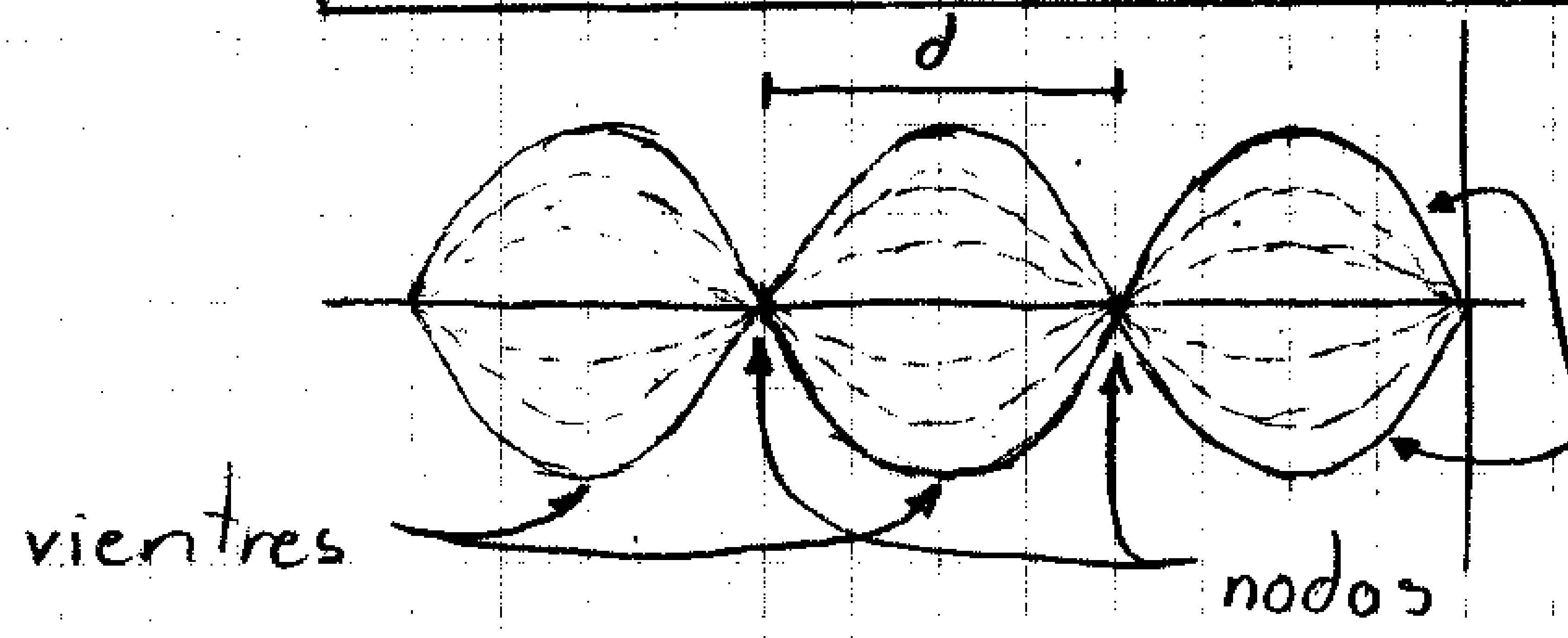
$$\left|\rho_\perp\right|_{\substack{\theta_i \geq \theta_{ic} \\ \cos t = -j\gamma}} = 1 \qquad \left|\rho_\parallel\right|_{\substack{\theta_i \geq \theta_{ic} \\ \cos t = -j\gamma}} = 1$$

* INCIDENCIA SOBRE UN CONDUCTOR PERFECTO

$$\boxed{\rho_\perp = -1} \quad \boxed{\rho_\perp = -1} \qquad \tau_\perp = \tau_\parallel = 0$$

- Ondas estacionarias (Incidencia normal en cond. perfecto)

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = 2E_{oi}\,\hat{y}\sin kz \sin \omega t}$$



$$\boxed{d = \lambda/2}$$

- Una onda estacionaria no transporta Potencia. (información)

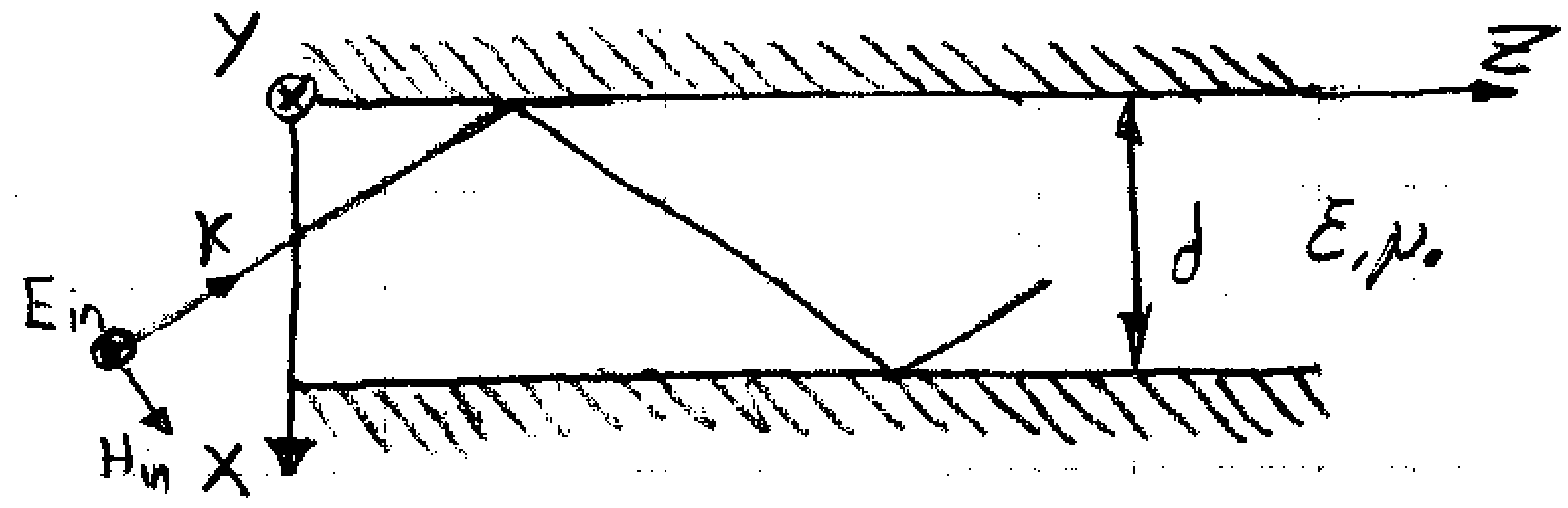
* INCIDENCIA SOBRE UN DIELÉCTRICO

- Ondas parcialmente estacionarias (Incidencia normal)

$$\vec{E}_1 = \hat{y}\,E_{oi}\left[(1+\rho)e^{-jk_1 z} + 2j\rho \sin k_1 z\right]$$

TEMA 5: GUIAS DE ONDA

* GUIAS PLANAS DE PAREDES CONDUCTORAS (2D)



Existen dos tipos de ondas:

TE : $\vec{E} = E_y \hat{y}$; $\vec{H} = H_x \hat{x} + H_z \hat{z}$

TM : $\vec{E} = E_x \hat{x} + E_z \hat{z}$; $\vec{H} = H_y \hat{y}$

- Modos TE en guias planas

$$\boxed{\vec{E}(x,z) = E_0 \sin(k_x x)\, e^{-j\beta z}\, \hat{y}}$$

$$\boxed{\beta = \sqrt{k^2 - \Big(\underbrace{\frac{m\pi}{d}}_{k_x}\Big)^2}}$$

Relación de dispersión

$$\boxed{P = \frac{\beta |E_0|^2}{4\omega\mu} d}$$ [W] por unidad de long. de $\hat{y}$

- Modos TM en guias planas

$$\boxed{\vec{H}(x,z) = -j \frac{\omega \varepsilon}{K_x} E_0 \cos(K_x x)\, e^{-j\beta z}\, \hat{y}}$$

Igual TE :

$K_x = \frac{m\pi}{d}$

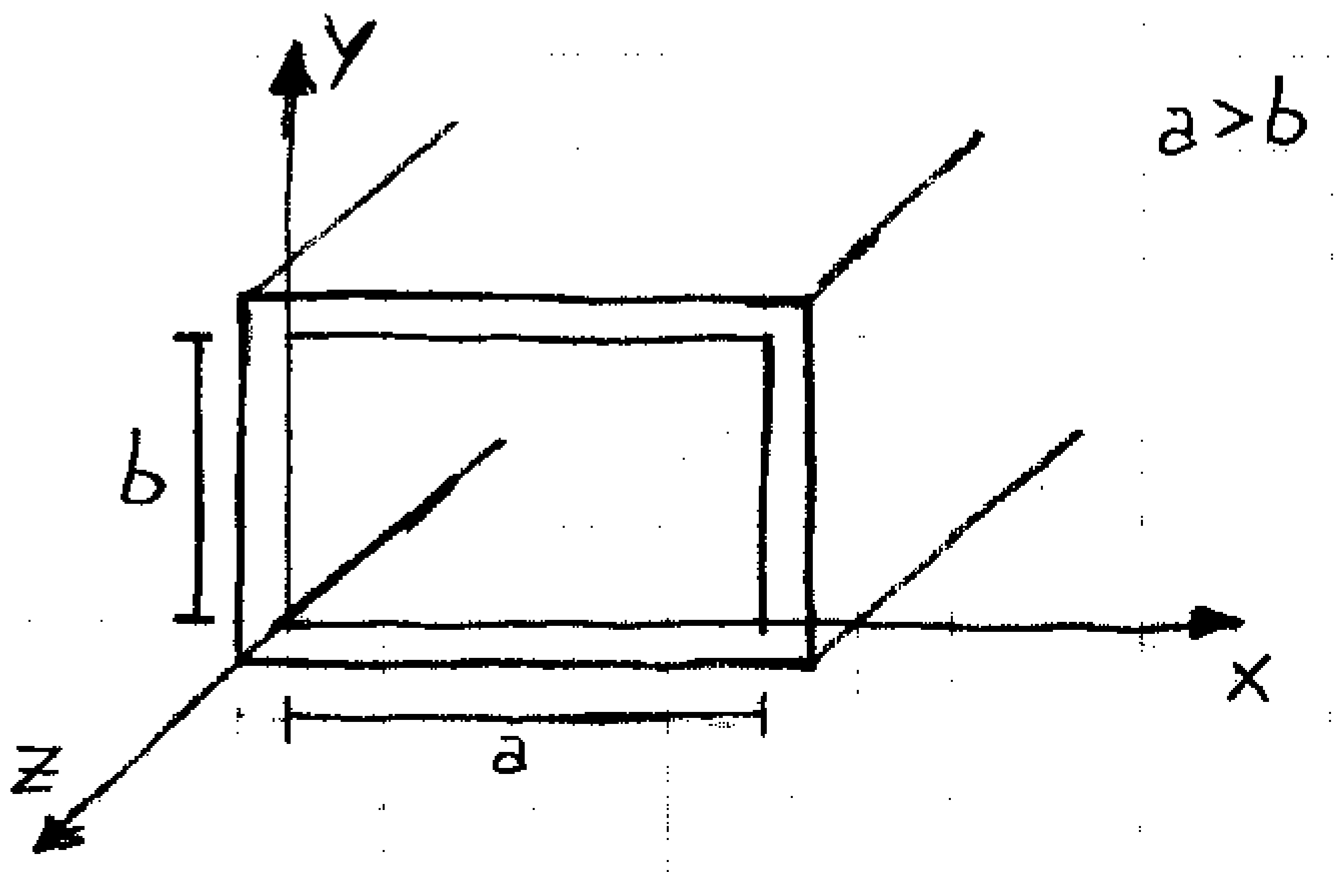
- Modos guiados y modos en corte

$$\boxed{m \leq \frac{d}{\lambda/2}}$$ Nº de modos guiados posibles en la guia

Para m superiores la onda se atenua rapidamente y desaparece.

De la misma forma, un modo existe si $\boxed{f \geq f_{cm} = \frac{v}{2} \cdot \frac{m}{d}}$

* GUIAS RECTANGULARES DE PAREDES CONDUCTORAS



Ondas TE $\Leftrightarrow$ $E_z = 0$

Ondas TM $\Leftrightarrow$ $H_z = 0$

$$\boxed{\beta = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$

- Modos TE

$$\boxed{E_x = -j\omega\mu \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} H_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y) e^{-j\beta z}} = \frac{\omega\mu}{\beta} H_y$$

$$\boxed{E_y = j\omega\mu \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} H_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y) e^{-j\beta z}} = -\frac{\omega\mu}{\beta} H_x$$

$H_z = H_0 \cos(k_x x)\cos(k_y y) e^{-j\beta z}$

- Modos TM

$$\boxed{H_x = -j\omega\varepsilon \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} E_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y) e^{-j\beta z}} = -\frac{\omega\varepsilon}{\beta} E_y$$

$$\boxed{H_y = j\omega\varepsilon \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} E_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y) e^{-j\beta z}} = \frac{\omega\varepsilon}{\beta} E_x$$

- Modos guiados y modos en corte

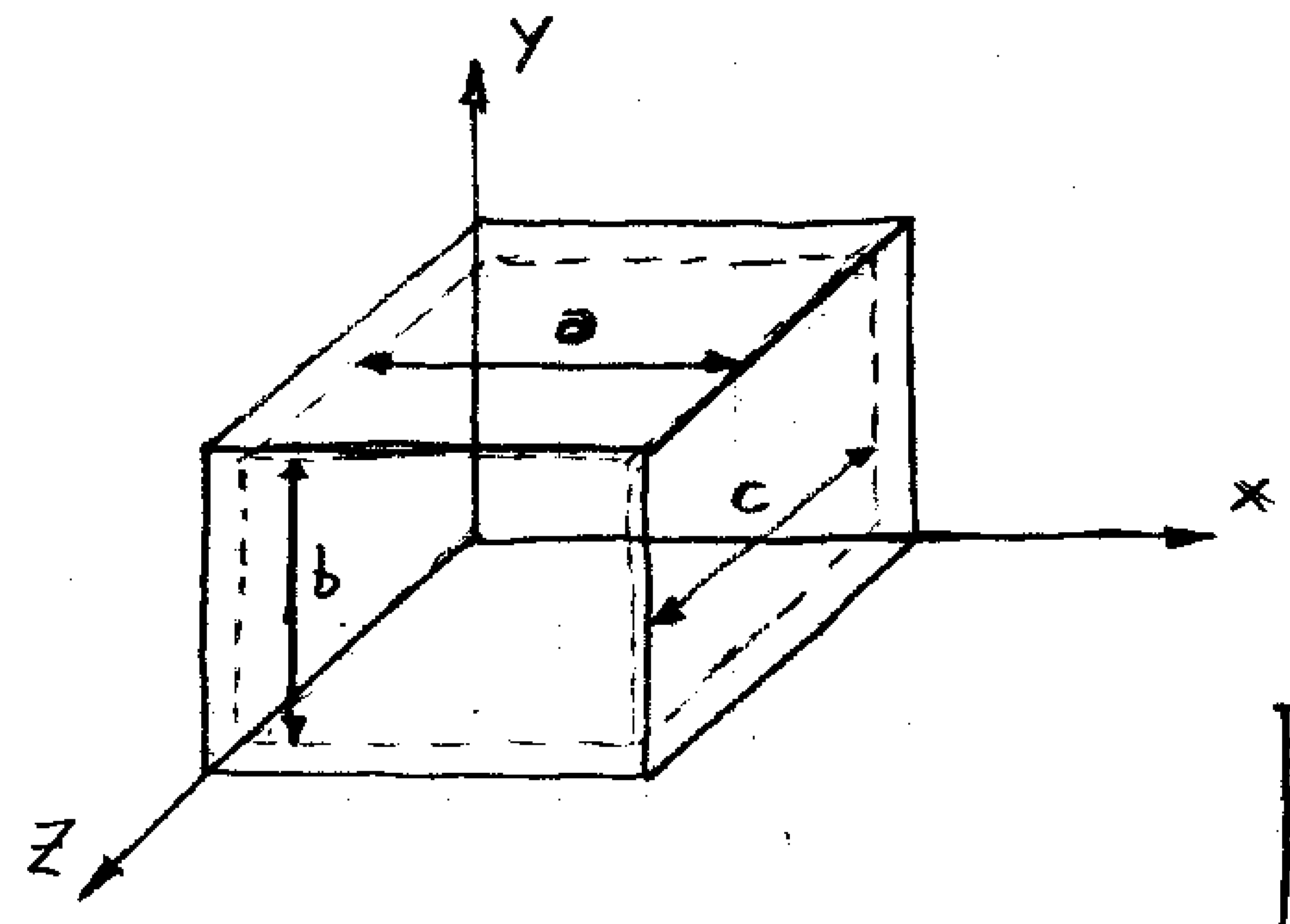
Modos soportados por la guía: m,n tq $\boxed{(2/\lambda)^2 \geq \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$

Frecuencia de corte : $\boxed{f_{c_{m,n}} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$

- Modo dominante TE_{10}

Es aquel que tiene la frecuencia de corte menor.

* CAVIDADES RESONANTES DE PAREDES CONDUCTORAS



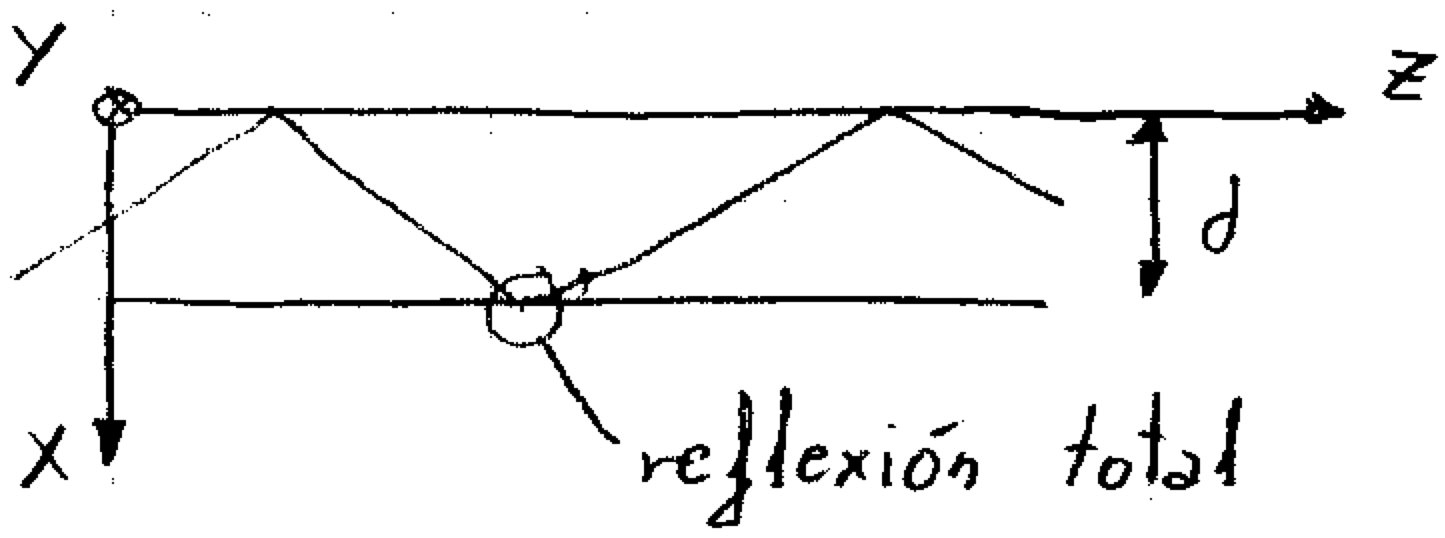
Condición de resonancia

$$\boxed{K = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}_{K_x} + \underbrace{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}_{K_y} + \underbrace{\left(\frac{p\pi}{c}\right)^2}_{K_z}}}$$

Frecuencias de resonancia

$$\boxed{f_{nmp} = \frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}}$$

* GUIAS DIELÉCTRICAS PLANAS



cubierta ③

film ②

substrato ①

Ec. de dispersión $\boxed{2K_{2x}d - \Phi_3^{TE} - \Phi_1^{TE} = 2m\pi}$

$$\Phi_3^{TE} = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mu_2\,\alpha_3}{\mu_3\,K_{2x}}\right) \quad ; \quad \Phi_1^{TE} = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mu_2\,\alpha_1}{\mu_1\,K_{2x}}\right)$$

$$K_{2x} = \sqrt{K_0^2 n_2 - \beta^2} \quad ; \quad \alpha_1 = \sqrt{\beta^2 - K_0^2 n_1} \quad ; \quad \alpha_3 = \sqrt{\beta^2 - K_0^2 n_3}$$

TEMA 6: RADIACIÓN DE ANTENAS ELEMENTALES

- Potenciales dinámicos

$$\boxed{\nabla\times\vec{A}=\vec{B}=\mu_0\vec{H}}$$

$$\boxed{-\nabla\Phi=\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

Norma de Lorentz $\boxed{\nabla\cdot\vec{A}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}}$

$$\nabla^2\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\Phi-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ec. de onda para los potenciales

$$\Phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}\frac{\rho(\vec{r}',t-t_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

$$A(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t-t_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

Sol. a las ec. de onda

$$\boxed{t_0=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

▲ Resolución de un problema típico de radiación

$$\begin{array}{ccccc} \vec{J}\ \text{conocida} & \Longrightarrow & \vec{A}(\vec{r},t) & \Longrightarrow & \vec{H}(\vec{r},t) \\ \big\downarrow \text{ec. de cont} & & \nabla\times\vec{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \longrightarrow & \Downarrow \\ \rho(\vec{r},t) & & & & \vec{E}(\vec{r},t) \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \vec{P}_m$$

- Ec. de los potenciales en RPS (notación fasorial)

$$\rho(\vec{r},t)=\rho_0(\vec{r})\cos(\omega t+\varphi_\rho(\vec{r}))$$

$$J_i(\vec{r},t)=J_{i0}(\vec{r})\cos(\omega t+\varphi_{Ji}(\vec{r}))$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\nabla^2\vec{A}+\omega^2\mu_0\varepsilon_0\vec{A}=-\mu_0\vec{J}\\ \nabla^2\Phi+\omega^2\mu_0\varepsilon_0\Phi=-\rho/\varepsilon_0\end{array}}$$

$$\Phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}\frac{\rho(\vec{r}')e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

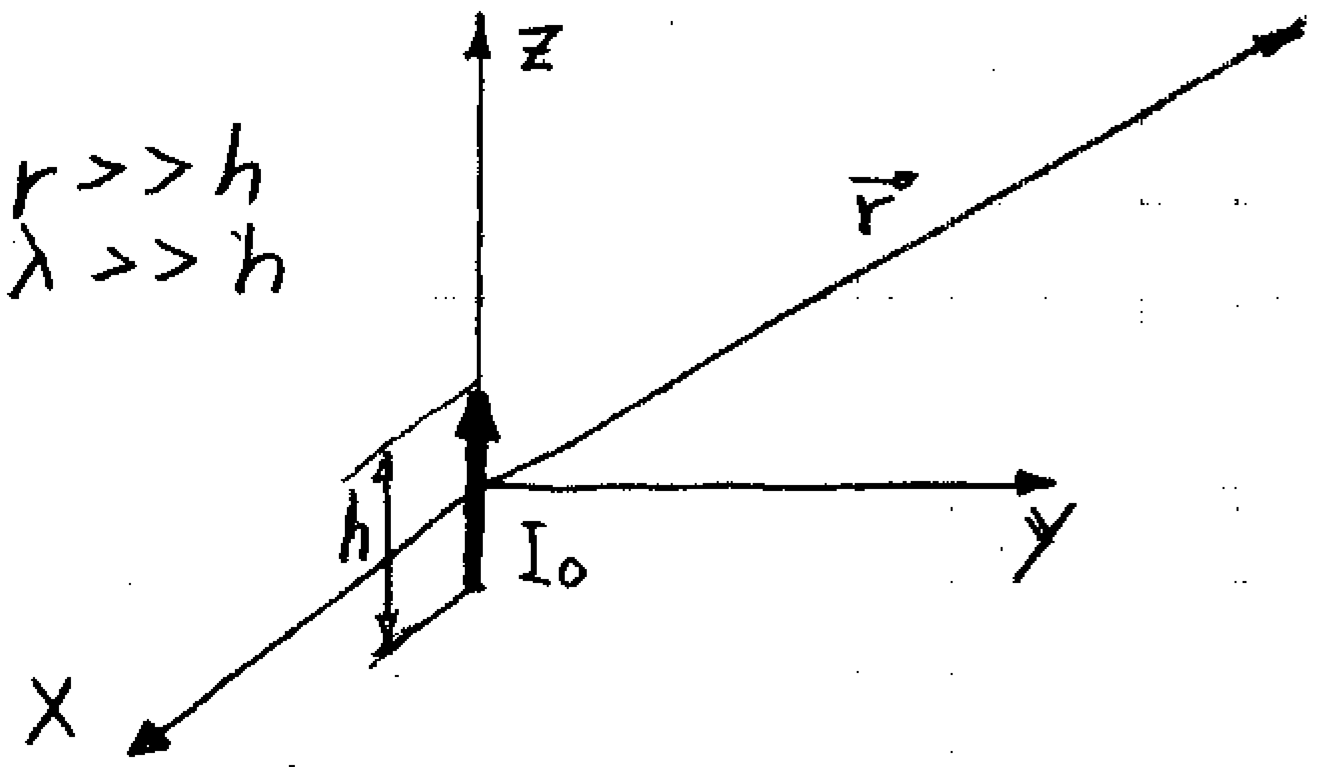
$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'}\frac{\vec{J}(\vec{r}')e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{A}=-j\omega\mu_0\varepsilon_0\Phi}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\Phi-j\omega\vec{A}}$$

* DIPOLO ELECTRICO OSCILANTE (dipolo elemental)

$r >> h$
$\lambda >> h$



$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 h \frac{e^{-jkr}}{r}\hat{z}}$$

$$\vec{A} \rightarrow \left(\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}\right) \rightarrow \vec{H} \rightarrow \left(\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) \rightarrow \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \hat{\varphi}\frac{I_0}{4\pi} hk^2\left(j\frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2r^2}\right)e^{-jkr}\sin\theta}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,\theta)\hat{r} + E_\theta(r,\theta)\hat{\theta}$$

$$\boxed{E_r = \eta_0\frac{I_0 h}{4\pi}2\left(1 - j\frac{1}{kr}\right)\cos\theta\frac{e^{-jkr}}{r^2}}$$

$$\boxed{E_\theta = \eta_0 k\frac{I_0 h}{4\pi}\left(1 + \frac{1}{kr} - j\frac{1}{k^2r^2}\right)\sin\theta\frac{e^{-jkr}}{r}}$$

- Campos radiados (Aproximación de campo lejano) $\boxed{r >> \lambda}$

$$\boxed{\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = jk\eta_0\frac{I_0 h}{4\pi}\sin\theta\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{\theta}}$$

$$\boxed{\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = jk\frac{I_0 h}{4\pi}\sin\theta\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{\varphi}}$$

Forma directa $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \cong -j\omega(A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi})}$

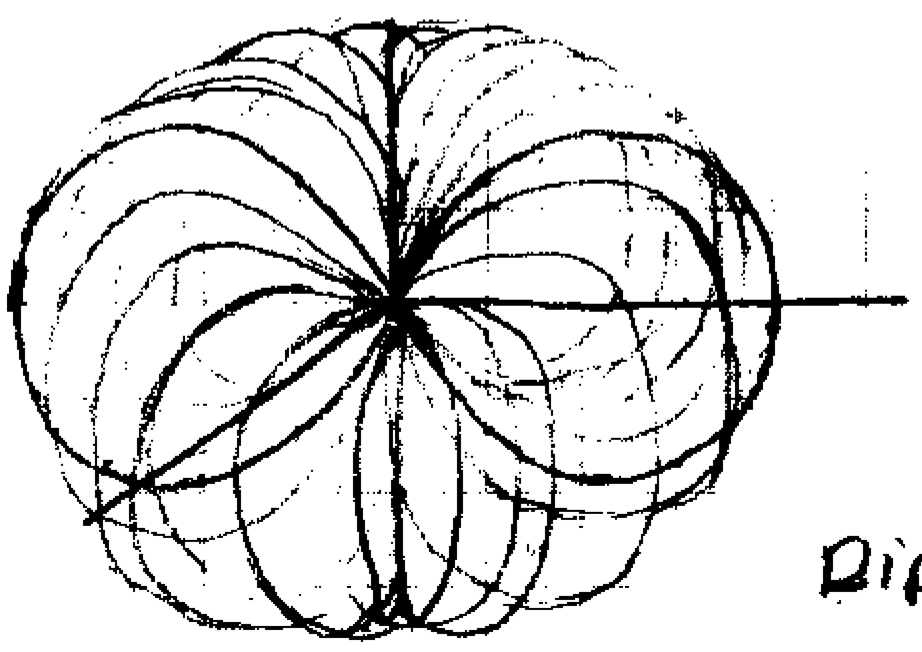
- Características de radiación del dipolo

$$\boxed{\vec{P}_m = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\vec{E}_{red} \times \vec{H}^*_{red}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_0 h}{4\pi}\right)^2 k^2 \eta_0 \frac{\sin^2\theta}{r^2}\,r} \quad [W/m^2]$$

$$\boxed{P_{red} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4\pi}(I_0 h)^2 k^2 \eta_0} \quad [W]$$

- *Diagrama de radiación* (Distrib. de la Pot. rad. en el espacio)

$$t(\theta,\varphi) = \frac{|\vec{P}_m|_{ANTENA}}{|\vec{P}_m|_{MAX}} = \{\text{Dipolo}\} = \sin^2\theta$$



Dipolo

Representación polar o esferica.

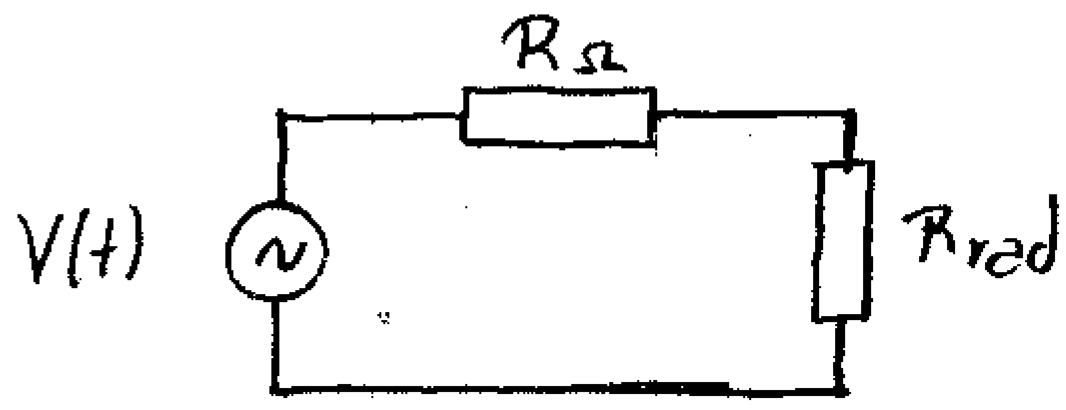
$$r = t(\theta,\varphi)$$

- *Ganancia directiva*

$$D(\theta,\varphi) = \frac{|\vec{P}_m|_{ANT.}}{|\vec{P}_m|_{ANT.\ ISOTROPICA}} = \frac{|\vec{P}_m|_{ANT}}{P_{rad}/4\pi r^2} \overset{\text{Dipolo}}{=} \frac{3}{2}\sin^2\theta$$

Directividad $\quad D_0 = D(\theta,\varphi)|_{MÁX}$

- *Resistencia de radiación*



$$\boxed{R_{rad} = 2\,\frac{P_{rad}}{I_0^2}} \quad [\Omega]$$

Dipolo $\quad \boxed{R_{rad} = 80\pi^2 (h/\lambda)^2} \quad$ Muy mala

* AGRUPACIÓN DE DIPOLOS

- Se mejoran las características de radiación del dipolo elemental.
- Se calcula haciendo superposición