

TEMA 1

* PROPIETATS FONAMENTALS DELS NOMBRES REALS

- $(\mathbb{R}, +)$ Grup commutatiu:
 - Prop. Associativa, distributiva, elem. neutre, oposat.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Anell commutatiu:
 - Prop. Associativa, distributiva, distrib. respecte suma, elem. neutre.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Cos commutatiu: elem. oposat
 - (\mathbb{R}, \cdot) Grup commutatiu
- $(\mathbb{R})_+$ Conjunt totalment ordenat: relacions d'ordre
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ Cos ordenat
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ Cos ordenat arquimedià: Prop. Arquimed.
- " " Cos ordenat arquimedià complet:
 - $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset ; \exists \alpha \in \mathbb{R} // \alpha = \sup A$

* VALOR ABSOLUT

$$|x| \geq 0$$

$$|xy| = |x||y|$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

* SUCCESIONS

- Lema del Sandwich $(a_n) \leq (b_n) \leq (c_n) \Rightarrow (b_n) \rightarrow L$

- Successions de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall m > n_0, |a_{n_0} - a_m| < \varepsilon$$

SUCC. CAUCHY \Leftrightarrow CONVERGENT (fals en \mathbb{Q})

- Todo conjunto acotado inf/sup tiene extremo inf/sup. " "

- Cualquier sucesión de intervalos encajados, tiene un elemento en la intersección.

→ Son equivalentes, un cuerpo es completo si las cumple.

* LIMITES DE SUCCESIONES

- Si $(a_n) \rightarrow L$

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \rightarrow L$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \rightarrow L$$

$$\boxed{H \leq G \leq A}$$

$$H_n = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}} \rightarrow L$$

$$\boxed{((a_n)^{b_n}) \rightarrow e^{b_n(a_n-1)}} \quad a_n \rightarrow 1 ; b_n \rightarrow \infty$$

$$\boxed{\sqrt[n]{x_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}}$$

$$\boxed{n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$$

TEMA 2:

* PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

- Inyectiva : $f(a) \neq f(b) \Leftrightarrow a \neq b$

- Exhaustiva : $A \xrightarrow{f} B \mid \forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$ } biyectiva

* CONTINUIDAD

- Una función es continua si $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i coincideix amb $f(a), \forall a$

- TEOREMA BOLZANO

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

f continua ;

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

$\exists \xi$ (al menos 1) $\in (a, b)$

$$+ \neq f(\xi) = 0$$

- TEOREMA DE WEIERSTRASS

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

f tiene máximo y mínimo

$$f: [a, b] \rightarrow [m, M]$$

$$\exists \beta \in [a, b] / f(\beta) = M$$

$$\exists \alpha \dots / f(\alpha) = m$$

* la imatge d'una funció continua, en un interval tancat és tb un interval tancat.

* DERIVACIÓ

- Una funció és derivable, si $\forall x \in \mathbb{R} \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$
- Derivada de la funció inversa: $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$
- $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

TEMA 3

- TEOREMA DE ROLLE

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 continua $[a, b]$, derivable (a, b)
 $f(a) = f(b)$

$$\exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = 0$$

- f té extrems relatius allà on $f'(x) = 0$

- TEOREMA DE CAUCHY

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 f, g continues en $[a, b]$
 $g(a) \neq g(b)$
 f', g' no se anulen a la vez

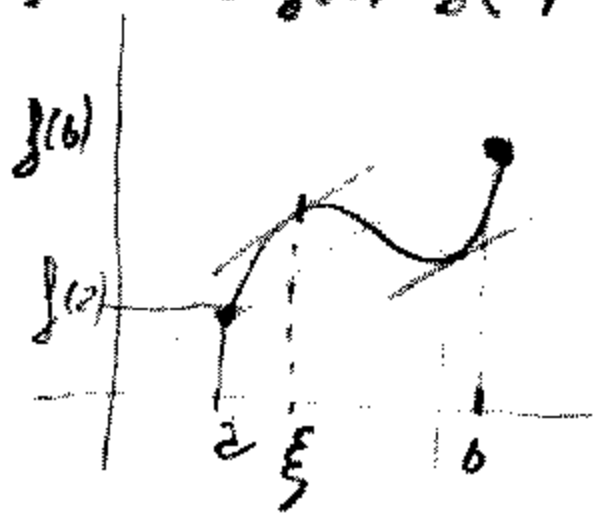
$$\exists \xi \in [a, b] \text{ t.q. } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Interpretación geométrica
 - Hay 1 pto (o+) ind la tg es \parallel a la recta que une $f(a) - f(b)$

- TEOREMA DEL VALOR MEDIO

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 continua en $[a, b]$
 derivable en (a, b)

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ t.q. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$



- TEOREMA DE L'HOPITAL

$f, g: B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$
 f, g derivables en $B_r(a)$
 g' no se anule en $B_r(a)$
 $\exists \lim_{x \rightarrow a} f = 0 \quad \exists \lim_{x \rightarrow b} g = 0$

$$\text{Si } \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

val per: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty = f(1 - \frac{a}{b})$
 $(1^\infty, 0^\infty, \infty^\infty) = e^{a \ln b}$

* TEOREMA DE TAYLOR

$$PT(f(x), a, n) = f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^k)$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \exists \xi \in (x, a) \cup (a, x)$$

$$PT(f', a, N-1) = (PT(f, a, N))'$$

$$PT(F, a, N+1) = F(a) + \int_a^x PT(f, a, N) \quad F' = f$$

TEMA 3

* INTEGRACIÓ

- Una condició suficient i necessària per tal que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitada en $[a, b]$ sigui integrable en $[a, b]$, és

$$\bar{S}_p - \underline{S}_p < \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon > 0 \quad ; \quad p: \text{partició de } [a, b]$$

- Tota funció contínua, o contínua a trossos en $[a, b]$ és integrable en $[a, b]$.

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

* TEOREMA DEL VALOR MIG EN INTEGRACIÓ

f contínua en $[a, b]$
 g integrable en $[a, b]$
 $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$\exists \xi \in (a, b)$ t q

$$\int_a^b f g = f(\xi) \int_a^b g$$

* TEOREMA DE BARROW

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitada i integrable en $[a, b]$

- $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, llavors $F(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua en $[a, b]$

- si a més f contínua en $[a, b] \rightarrow F'(x) = f(x)$

* Regla de Barrow

$$\int_a^b g(t) dt = G(b) - G(a) \quad \text{on } G'(x) = g(x)$$

$$* N(x) = \int_{\varphi(x)}^{\gamma(x)} f(t) dt \Rightarrow N'(x) = f(\gamma(x)) \gamma'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

* APLICACIONS DE LA INTEGRAL

- Àrees funcions polars

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta) d\theta$$

- Volums de revolució

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

- Longitud de corbes

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta ;$$

- Superfícies de revolució

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

TEMA 4

- INTEGRALS IMPROPIES

1a Espècie

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} \text{ CONV} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

2a Espècie

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} \text{ CONV} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Convergència absoluta

$$\text{Si } \int_a^b |f(x)| dx \text{ CONV} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ CONV}$$

- Si és convergent, però no ABS. CONV, direm que és Condicionament convergent.

Criteris de convergència per integrals de funcions positives

* Si $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) \geq \int_a^{\infty} g(x)$

- Si $\int_a^{\infty} f(x) \text{ CONV} \Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) \text{ CONV}$

- Si $\int_a^{\infty} g(x) \text{ DIV.} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) \text{ DIV}$

* $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

$$L = 0 \begin{cases} \int_a^{\infty} g(x) \text{ CONV} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) \text{ CONV.} \\ \int_a^{\infty} f(x) \text{ DIV} \Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) \text{ DIV} \end{cases}$$

$$L = \infty \begin{cases} \int_a^{\infty} f(x) \text{ CONV} \Rightarrow \int_a^b g(x) \text{ CONV} \\ \int_a^b g(x) \text{ DIV} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) \text{ DIV} \end{cases}$$

$L \neq 0, \infty \Rightarrow \int_a^b f(x) \text{ i } \int_a^{\infty} g(x)$ tenen el mateix caràcter de convergència

- SÈRIES NUMÈRIQUES

* Progresió aritmètica

$$a_n = a_0 + nd$$

$$S_n = \frac{(n+1)(2a_0 + nd)}{2}$$

* Progresió geomètrica

$$a_n = \lambda^n$$

$$S_n = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$$

$$\text{CONV} \Rightarrow |\lambda| < 1$$

- Criteri general de convergència de sèries

$$(\underline{a}_n) \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \text{ DIV}$$

- Convergència absoluta

"Idem integrals"

- Criteris de convergència per a sèries de termes no negatius

* "Els mateixos integrals"

* Criteri d'Alambert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$\left\{ \begin{array}{l} L > 1 \\ L < 1 \\ L = 1 \end{array} \right.$ la sèrie $\sum a_n$ és DIV
" " " CONV
No decideix

* Criteri de Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \quad \text{si } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

"Igual cas anterior"

* Criteri de Raabe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = L$$

$\left\{ \begin{array}{l} L > 1 \\ L < 1 \\ L = 1 \end{array} \right.$ $\sum a_n$ CONV
 $\sum a_n$ DIV
No decideix

* Criteri de la integral

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\int_1^{\infty} f(x) dx$ tenen el mateix caràcter de conv.

* Criteri de Prinsheim

$$\sum a_n \text{ tq } \exists x, \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} a_n = L \neq 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \alpha < 1 \\ L = 0, \alpha > 1 \\ L = \infty, \alpha \leq 1 \end{array} \right.$ $\sum a_n$ CONV
 $\sum a_n$ DIV
 $\sum a_n$ CONV
 $\sum a_n$ DIV

* Criteri de Leibnitz, (per sèries alternades)

$$\sum (-1)^n a_n \text{ CONV} \Leftrightarrow (a_n) \rightarrow 0$$

- SÈRIES DE POTÈNCIES

$$\sum a_n (x-c)^n$$

Es convergen en el interval $x = (c-R, c+R) \cup [c-R, c+R) \cup (c-R, c+R] \cup [c-R, c+R]$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$



Calculo de límites

Límites laterales

Aproximación a un pto. por defecto (izq.), por exceso (der.)

Para que exista límite tienen que existir límites laterales y que tanto el límite en el punto como los laterales sean igual a un número que no sea infinito.

Indeterminaciones : $0/0$, ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 , $\infty - \infty$

1. Funciones racionales ; $g(x)/g(x) = 0/0$ ó ∞/∞

- $0/0$ Se hace el cociente de polinomios.
- ∞/∞ Se divide por el X de mayor grado.

2. Funciones irracionales ; $g(x)/g(x) = 0/0$ ó ∞/∞

Multiplicamos por el conjugado de la raíz arriba y abajo

3. L'Hopital, se deriva en el numerador y en el denominador a la vez.

4. $0 \cdot \infty$ Se transforma en el primer o segundo caso. Ejemplo :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1/g(x)} & \text{Da } \infty/\infty \text{ o } 0/0 \\ \text{o bien} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1/f(x)} \end{cases}$$

1. $1^\infty, 0^0, \infty^0 \Rightarrow (108^{800})$

- Si el límite tiende a infinito se hace por el número e

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + f(x))^{1/f(x)}$$

Donde F(x) tiende a 0.

- Si tiende a K se hace por Logaritmos neperianos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\ln x)^x = \ln k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\ln x) = \ln k$$

$$\ln k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\ln x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$\ln k = 0 \Rightarrow e^0 = k \Rightarrow \underline{k = 1}$$

2. $\infty - \infty$ Multiplicando y dividiendo por su conjugado

Comparación de Infinitos : $\log_b n < n < n^n < k^n < n! < n^n$

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

- Si tiende a 1

$$\text{Si } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)^{b_n} = \alpha \Rightarrow (a_n)^{b_n} = e^\alpha$$

- Si tiende a 0 por infinitesimos equivalentes



Tema 1 : Sucesiones

Es una aplicación de los números naturales sobre los reales.

Sucesión acotada : $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / a_n \leq c$

Una serie converge cuando su límite existe, será divergente cuando su límite sea $\pm \infty$.

Toda sucesión convergente está acotada y el valor de convergencia es la cota.

Carácter de una sucesión :

- Convergente : si el límite del termino general es finito
- Divergente : si el límite del termino general es + o - infinito
- Oscilante : si carece de límite (no es ninguna de las anteriores)

MONOTONIA

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n : \text{creciente}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} < a_n : \text{decreciente}$$

Si no se verifican estas dos condiciones son oscilantes

Para estudiar su monotonía

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} > 1 \Rightarrow \text{Creciente} \\ < 1 \Rightarrow \text{Decreciente} \\ = 1 \Rightarrow \text{Iguales} \end{cases} \quad a_n - a_{n+1} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{creciente} \\ < 0 \Rightarrow \text{decreciente} \\ = 0 \Rightarrow \text{iguales} \end{cases}$$

Para calcular los límites podemos utilizar todo menos L'Hopital.

Comparación de infinitos : $\log_b n < n < n^a < K^n < n! < n^n$

Criterio de STOLZ (bueno para eliminar factoriales o términos infinitos con relación)

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}} \quad \text{Y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{b_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{\frac{1}{b_{n+1} - b_n}}$$

Solo si se cumple :

$$\begin{aligned} &\{b_n\} \text{ es monótona creciente con } \lim \{b_n\} = \pm \infty \quad \underline{\text{O}} \\ &\{b_n\} \text{ es monótona creciente y } \lim \{a_n\} = \lim \{b_n\} = 0. \end{aligned}$$

Comparación con otras sucesiones

Dado a_n En el que no sabemos $\lim a_n$, Si hay un $b_n \geq a_n$ en el que el $\lim b_n = K$ y también Hay un $c_n \leq a_n$ en el que el $\lim c_n = K$ entonces también el $\lim a_n$ es K .

Teorema : Sean a_n y b_n dos sucesiones de números reales tales que $a_n > 0$ para todo n perteneciente a los números reales

$$\begin{aligned} \text{Si :} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \\ & \quad y \\ & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \end{aligned} \quad \text{Entonces} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{\frac{1}{b_{n+1} - b_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{b_n}}$$



Tema 2 : Series

Dada la sucesión $\{a_n\}$ la serie formada por los términos de dicha sucesión se representa como : $\sum a_n$ y corresponde a la suma de todos los términos de la sucesión.

Carácter de una serie.

- Convergente : Cuando la suma es un número real.
- Divergente : Cuando la suma da + o - infinito.
- Oscilante : Cuando no es ninguna de las anteriores.

Suma de una serie geométrica. $S_n = a + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n + ar^{n+1}$

- $|R| < 1$ Serie convergente
- $R \leq -1$ Serie oscilante
- $R \geq 1$ Serie divergente

$$Suma = \frac{a_1 - a_1 R^n}{1 - R} = \frac{a_1 - a_1 R^n}{1 - R} = \frac{a_1 R^n - a_1}{R - 1}$$

Propiedades generales de las series numéricas

1. $\sum a_n = S$ entonces $\sum K a_n = K S$ Solo si k es n° real distinto de 0
Si $\sum a_n$ es divergente no podemos saber nada.
2. Al suprimir añadir o modificar un número finito de términos de una serie el carácter de una serie no se modifica, si bien cuando la serie sea convergente la suma puede verse alterada.

Condición necesaria para la convergencia: Sea : $\sum a_n$ Calculamos : $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k}$

- Si $k = 0$ la serie converge o diverge (Continuar el problema)
- Si $k \neq 0$ la serie diverge (Fin del problema)

Convergencia de series con solo términos positivos

- A. **Teorema 1 :** Toda serie de términos positivos es convergente o divergente, pero nunca oscilante.
- B. **Teorema 2 :** Alterando arbitrariamente el orden de los términos, descomponiendo arbitrariamente cada uno de los sumandos, no se altera el carácter de la serie, ni varía su suma.

1. **Criterio de Cauchy o de la Raíz.** Calculamos : $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k}$

- Si $k < 1$ la serie converge (Fin)
- Si $k > 1$ la serie diverge (Fin)
- Si $k = 1$ no sabemos (Continuar)

Funciona con : $()^n, ()^{p(n)}$

2. **Criterio de D'Alembert o del cociente.** Calculamos : $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = k}$

- Si $k < 1$ la serie converge (Fin)
- Si $k > 1$ la serie diverge (Fin)
- Si $k = 1$ no sabemos (Continuar)

Funciona con : $k^n, n!,$ Semifactoriales $(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1))$.

3. **Criterio de Raabe.** Calculamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) = k$$

- Si $k < 1$ la serie diverge (Fin).
- Si $k > 1$ la serie converge (Fin).
- Si $k = 1$ no sabemos (Continuar).

Funciona cuando el criterio de la raíz o el cociente sale 1

✗ **Criterio del Logaritmo.** Calculamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} = k$$

- Si $k < 1$ la serie diverge (Fin).
- Si $k > 1$ la serie converge (Fin).
- Si $k = 1$ no sabemos (Continuar).

Nota: El logaritmo puede estar en cualquier base.

5. **Criterio de comparación.** Sea: $\sum a_n \leq \sum b_n$

- Si $\sum a_n$ diverge entonces $\sum b_n$ diverge.
- Si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.

6. **Criterio de comparación por paso al límite.**

Buscamos el carácter de $\sum a_n$ y sabemos el carácter de $\sum b_n$. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

- Si $k \neq 0$ y $k \neq \infty$ entonces ambas series tienen el mismo carácter.
- Si $k = 0$ y si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.
- Si $k = \infty$ y si $\sum b_n$ diverge entonces $\sum a_n$ diverge.

Series de comparación

- S. Geométrica: $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$
 - Si $|r| < 1$ serie convergente
 - Si $|r| \geq 1$ serie divergente
- S. Armónica general: $1/(1^p) + 1/(2^p) + 1/(3^p) + \dots + 1/(n^p)$
 - Si $p > 1$ serie convergente
 - Si $p \leq 1$ serie divergente

7. **Criterio de Prinsheim:** Calculamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = k$$

que cumpla

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ y \\ k < \pm\infty \end{cases}$$

- Si $\alpha > 1$ la serie converge
- Si $\alpha \leq 1$ la serie diverge

Nota: Criterio de comparación con la serie armónica general camuflado

8. Criterio integral

$\sum a_n$ te el mismo carácter de convergencia que $\int_1^\infty f(x) dx$ on $f(n) = a_n$

• Sèries de potències

Sèries de la forma

$$\sum a_n (x-c)^n$$

Són convergents en intervals de la forma

$$(-R, R), [R, R), (-R, R], [-R, R]$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Convergencia de series con términos cualesquiera

- A. Sea : $\sum a_n$. Estudiamos : $\sum |a_n|$ y $\sum a_n$
- Si $\sum |a_n|$ converge (sus términos son positivos) decimos que $\sum a_n$ converge absolutamente y que, por lo tanto, converge (Fin)
 - Si $\sum |a_n|$ diverge entonces puede ocurrir que:
 - $\sum a_n$ converge. Se dice que la serie converge condicionalmente.
 - $\sum a_n$ diverge. La serie es incondicionalmente divergente.
- B. En toda serie absolutamente convergente se puede alterar arbitrariamente el orden de los términos sin que altere su suma.
- C. En toda serie es absolutamente convergente que tenga valores positivos y negativos la serie de términos positivos y la serie de términos negativos serán convergentes por separado.

1. **Teorema de Leibniz** : una serie alternada es convergente si se cumple las siguientes condiciones :
- Es monótona decreciente en valores absolutos y
 - El límite en el infinito es 0 ($\lim a_n = 0$)
2. **Criterio de Dirichet** (Para series alternadas) Dado $\sum a_n = \sum b_n c_n$
 $\sum a_n$ converge si se cumplen las siguientes condiciones, de no cumplirse es divergente :
- Si b_n está totalmente acotada y
 - $\{c_n\}$ una sucesión monótona decreciente que convergen en 0
3. **Criterio de Abel**. Dado $\sum a_n = \sum b_n c_n$, entonces $\sum a_n$ converge si :
- $\sum b_n$ de números reales, converge.
 - $\{c_n\}$ es una sucesión monótona decreciente y acotada.

Operaciones con series

1. Dadas $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergentes de sumas a y b respectivamente entonces se verifica que : $\sum a_n \pm b_n$ es también convergente y su suma es : $a \pm b$.
2. Sea la serie $\sum p_n$ formada por :
- $$p_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \dots + a_{n-2} b_3 + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$$
- La serie así definida en la que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes y una al menos es absolutamente convergente, en ese caso la serie $\sum p_n$ es convergente y su suma es $a \cdot b$.



Tema 3 : Funciones de variable real.

Función real de variable real

Función creciente en el intervalo I cumple : $\forall x, x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$

Función decreciente en el intervalo I cumple : $\forall x, x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$

Si sustituimos el \leq y el \geq por $<$ y $>$ lo hacemos estrictamente.

Función es monótona creciente o decreciente si lo es para todo R.

Función es par si : $f(x) = f(-x)$

Función es impar si : $f(x) = -f(-x)$

Función es periódica si : $f(x) = f(x + n a)$ (Donde n es un n° entero y a es el periodo)

Límite de una función en un punto

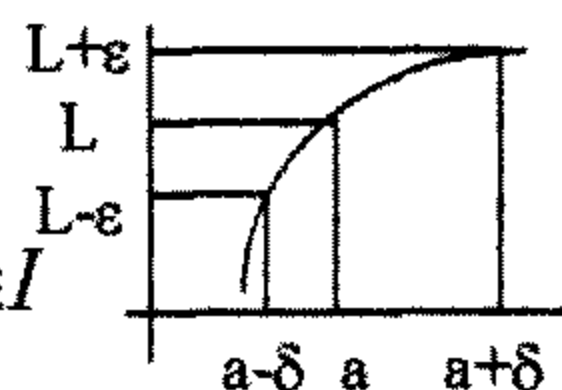
Suponemos $y = f(x)$ diremos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ cuando al aproximar la x

indefinidamente al valor a la función se aproxima indefinidamente al valor l.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in f(I, R)$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ donde $a \in I$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$



Límites laterales

Dada una función f(x) se dice que tiene límite por la derecha del punto a y se

representa como : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Condición necesaria y suficiente para que f(x) tenga límite en a es que existan los límites por la derecha e izquierda y que coincidan.

Cálculo de límites (infinitesimos e infinitos)

Se dice que f(x) es un infinitesimo en $x = a$ si se comporta la función de la misma manera que otra en dicho punto. Tabla de infinitesimos :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{tg}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{arc sen}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{arcsen}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x) = \lim_{x \rightarrow 0} x$$

Se en todas estas funciones se puede sustituir f(x) por x, mientras que f(x) tienda a 0.

Regla de L'Hopital Para 0/0 y ∞/∞

$$\lim f(x)/g(x) = 0/0 \text{ o } \infty/\infty \text{ Entonces } \lim f(x)/g(x) = \lim f'(x)/g'(x)$$

Continuidad

Es condición necesaria y suficiente para que f(x) sea continua :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Es condición necesaria y suficiente para que sea continua en un punto que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$f(x)$ es continua en un intervalo I si es continua en todos los puntos de ese intervalo.

Discontinuidad (Tipos)

1. **Discontinuidad evitable** : Si $f(x)$ no está definida en el punto ($x=a$) o el límite de la función cuando tiende a (a) no es igual a la función en dicho punto.
2. **Discontinuidad de 1ª especie** : Si en el punto existen los límites laterales pero no coinciden.
3. **Discontinuidad de 2ª especie** : Cuando alguno de los límites laterales o no existen o son infinitos.



Tema 6 : Derivabilidad

Dado $y = f(x)$ en un intervalo I se define la derivada de $f(x)$ representado como

$$f'(x) \text{ como : } F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

El límite no existe si $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f(x)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f(x)}{h}$

Si este límite existe diremos que la función es derivable

TEOREMA : Toda función derivable en $x = x_0$ es continua en dicho punto (Ojo al contrario !!!! NO !!!!)

Tabla de derivadas

dadas $u, v = f(x)$

y $k, m, a = \text{constantes}$

PRIMITIVAS	DERIVADAS	PRIMITIVAS	DERIVADAS
$y = k$	$y' = 0$	$y = \text{tg}(u)$	$y' = u' / \cos^2 u$ $y' = u' (1 + \text{tg}^2 u)$
$y = k \cdot u$	$y' = k \cdot u'$	$y = \text{sec}(u)$	$y' = \text{sec}(u) \cdot \text{tg}(u) \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$	$y = \text{cosec}(u)$	$y' = -\text{cosec}(u) \cdot \text{cotg}(u) \cdot u'$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$y = \text{cotg}(u)$	$y' = -u' / \text{sen}^2 u$ $y' = u' - (1 + \text{cotg}^2 u) u'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$Y = \text{arcsen}(u)$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = u^m$	$y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$	$Y = \text{arccos}(u)$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \text{arctg}(u)$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2 \cdot \sqrt{u}}$	$Y = \text{arccotg}(u)$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$
$y = L u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \text{senh}(u)$	$y' = \text{cosh}(u) \cdot u'$
$y = \lg_a u$	$y' = L_a e \frac{u'}{u} = \frac{1}{L_a} \frac{u'}{u}$	$y = \text{cosh}(u)$	$y' = \text{senh}(u) \cdot u'$
$y = a^u$	$y' = a^u \cdot L_a \cdot u'$	$y = \text{tgh}(u)$	$y' = \frac{u'}{\cosh^2 u}$
$y = u^v$	$y' = u^v (v' \cdot L u + v \cdot u' / u)$	$Y = \text{argcosh}(u)$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$
$y = \text{sen}(u)$	$y' = \text{cos}(u) \cdot u'$	$Y = \text{argsenh}(u)$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
$y = \text{cos}(u)$	$y' = -\text{sen}(u) \cdot u'$	$y = \text{argtgh}(u)$	$y' = \frac{u'}{1-u^2}$

Derivadas laterales

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto y sea x_0 un punto generico de este intervalo, llamamos derivada en x_0 por la derecha o izquierda y se representa :

Por la derecha de x_0

$$F'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Por la izquierda de x_0

$$F'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

Es condición necesaria y suficiente para que exista la derivada, que existan y sean iguales sus derivadas laterales.

Resumen de Análisis matemático Página 9

Es condición necesaria y suficiente para que exista derivada en un punto que existan derivadas laterales y que coincidan.

Casos en los que no hay derivada:

- **Punto anguloso** : Ambas derivadas existen y son finitas, pero no coinciden.
- **Punto de Inversión** : Ambas derivadas laterales son + o - con el mismo signo a la vez.
- **Punto de retroceso** : Si son infinito pero con signo distinto.

Derivada de la función inversa

Si $y = f(x)$ que cumple que es derivable en x_0 y además que $f'(x_0)$ no es cero entonces cumple :

Que la función inversa $f^{-1}(y)$ definida como : $f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Es derivable en x_0 , de hecho son continuas en el mismo intervalo

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Derivada de funciones paramétricas

Cuando no se puede despejar o es muy complicado, y respecto de x se hace la derivación implícita. Pasos :

- 1- Se deriva con x y con y independiente, pero las que derivemos con y ponemos dy/dx .
- 2- Agrupo en un lado los términos con dy/dx
- 3- Dejo solo el dy/dx y lo demás lo paso dividiendo.

Derivadas sucesivas

Para calcular esto de lo que se trata es derivar sucesivamente pero se puede utilizar Leibniz

Dado $u = f(x)$, $v = g(x)$, dos funciones que admiten derivadas sucesivas:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} + \binom{n}{1} u^{(n-1)} \cdot v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} \cdot v'' + \binom{n}{3} u^{(n-3)} \cdot v''' + \dots + \binom{n}{n-1} u' \cdot v^{(n-1)} + u \cdot v^{(n)}$$

RECOMENDACIONES :

- Si tienes una función racional se tiene que descomponer primero, de no tener nada en el numerador se trabaja mucho mejor ~~con~~ subiéndolo todo de la siguiente forma : $1/x = x^{-1}$.
- Se suele pasar todo a sen o cos, sumándole $\pi/2$



Tema 7 :Series de potencias

Se llama serie potencial a una serie funcional de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$
 En toda serie entera existe un cierto valor tal que la serie converge para todo x existente para un cierto valor. $\forall x \in (-R, R)$, para calcular este intervalo se utilizan los criterios de Dalember o del cociente, Cauchy o de la raíz

Desarrollo en serie de Taylor

$$x = a$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots + O((x-a)^n)$$

Desarrollo en serie de Mc Laurin : Es igual que Taylor pero con $x = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Resto de Lagrange un polinomio de Taylor de grado n :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \xi \in (x, a) \text{ o } (a, x)$$

Serie Binómica

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \binom{m}{4}x^4 + \dots + \binom{m}{n}x^n \quad \text{rango convergencia } [-1, 1]$$

Operaciones con series de potencias Dado $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$

$$f(k \cdot z) = \sum a_n k^n z^n$$

$$f(x^p) = \sum a_n k^{np}$$

$$f(x) \pm g(x) = \sum (a_n \pm b_n) x^n$$

$$f(x) \cdot g(x) = (\sum a_n x^n) (\sum b_n x^n)$$

Estas operaciones pueden cambiar el intervalo de convergencia.

Si es una suma el intervalo es la unión de los intervalos.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + (x-1)^4 + \dots + (-1)^n (x-1)^n \quad 0 < x < 2$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n} \quad 0 < x < 2$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\text{cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\text{arc} \text{ sen } g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ar} \text{ sen}(x) = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{(2n)^n x^{2n+1}}{(2^n n!)^2 (2n+1)} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$



Tema 8 : Representación Gráfica de funciones

1. Dominio (estudiar las siguientes funciones problemáticas)

- a) Racionales : $F(x) = P(x) / Q(x)$ Entonces $D = \mathbb{R} - \{ \text{Puntos que } Q(x) = 0 \}$
- b) Raíces : $F(x) = P(x)^{1/2}$ Entonces $D = \{ x / P(x) \geq 0 \}$
- c) Logaritmos : $F(x) = \text{Log } P(x)$ Entonces $D = \{ x / P(x) > 0 \}$

2. Puntos de corte con ejes (x e y)

- Corte con eje X : $0 = F(x)$ Puntos $(x', 0)$
- Corte con eje Y : $y = F(0)$ Puntos $(0, y')$

3. Signo

El signo que toma la función para determinados valores, hay que estudiarlo entre los puntos raros del dominio y entre los puntos de corte del eje X

4. Simetrías

- PAR (Respecto del eje X) : $F(x) = F(-x)$
- IMPAR (Respecto del origen) : $F(x) = -F(-x)$

5. Periodicidad

6. Asíntotas

- Verticales : Se calcula el límite de la función cuando tiende a puntos raros en los que no existe función y si da $+\infty$ - infinito es una asíntota.
- Horizontales : Se calcula si el límite de la función cuando tiende a infinito o menos infinito da un número finito, en ese caso hay asíntota en dicho número.
- Oblicuas : (Solo pueden existir si no hay horizontales, para los dos lados)
 Se calcula $m = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)/x$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - mx$
 Si se puede calcular todo, la asíntota está en $y = mx + n$

7. Crecimiento y decrecimiento

$F'(x) > 0$ Crece $F'(x) < 0$ Decrece
 También se puede estudiar esto a partir de mínimos, máximos y asíntotas.

8. Máximos y mínimos

- Hacer $F'(x)$ b) $F'(x) = 0$ (Despejo x) c) Hacer $F''(x)$
- Si $F''(x_0) > 0$ Es un mínimo (la curva está por encima)
 Si $F''(x_0) < 0$ Es un máximo (la curva está por debajo)

9. Puntos de inflexión

- $F''(x) = 0$ (Despejar x) b) Calcular $F'''(x)$
- Si $F'''(x_0) = 0$ No hay inflexión
 Si $F'''(x_0) \neq 0$ Hay un punto de inflexión

10. Concavidad y convexidad

$F''(x) > 0$ Cóncavo (U) $F''(x) < 0$ Convexo (Λ)

11. Recorrido

Estudio de los valores que puede tener la función

Cuadro de integrales inmediatas

$\int dx = x + c$	$\int u' dx = u + c$
$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{u'}{u} dx = Lu + c$
$\int u' e^u dx = e^u + c$	$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{La} + c$
$\int u' \text{sen}(u) dx = -\text{cos}(u) + c$	$\int u' \text{cos}(u) dx = \text{sen}(u) + c$
$\int \frac{u' dx}{\text{cos}^2 u} = \int u' (1 + \text{tg}^2(u)) dx = \text{tg}(u) + c$	$\int \frac{u' dx}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arcsen}(u) + c$
$\int \frac{u' dx}{\text{sen}^2 u} = \int u' (1 + \text{cot}^2(u)) dx = -\text{cot} g(u) + c$	$\int \frac{u' dx}{1+u^2} = \text{arctg}(u) + c$
$\int u' \text{sh}(u) = \text{ch}(u) + c$	$\int u' \text{ch}(u) = \text{sh}(u) + c$
$\int \frac{u' dx}{\sqrt{1+u^2}} = \text{arg sh}(u) + c$	$\int \frac{u' dx}{\sqrt{u^2-1}} = \text{arg ch}(u) + c$
$\int \frac{u' dx}{1-u^2} = \text{arg th}(u) + c$	

Sustituciones recomendadas

Función	Cambio	Cálculos
$\int R(x, e^x) dx$	$e^x = t$	$x = Lt \quad ; \quad dx = \frac{dt}{t}$
$\int R(x, Lx) dx$	$Lx = t$	$x = e^t \quad ; \quad dx = e^t dt$
$\int R(x, \text{arctg}(x)) dx$	$\text{arctg}(x) = t$	$x = \text{tg}(t) \quad ; \quad dx = \frac{dt}{\text{cos}^2 x}$
$\int R(x, \text{arcsen}(x)) dx$	$\text{arcsen}(x) = t$	$x = \text{sen}(t) \quad ; \quad dx = \text{cos}(t) dt$
$\int R(x, \text{arccos}(x)) dx$	$\text{arccos}(x) = t$	$x = \text{cos}(t) \quad ; \quad dx = -\text{sen}(t) dt$
$\int R(x, \text{arg th}(x)) dx$	$\text{argth}(x) = t$	$x = \text{th}(t) \quad ; \quad dx = \frac{dt}{\text{ch}^2 x}$
$\int R(x, \text{arg sh}(x)) dx$	$\text{argsh}(x) = t$	$x = \text{sh}(t) \quad ; \quad dx = \text{ch}(t) dt$
$\int R(x, \text{arg ch}(x)) dx$	$\text{argch}(x) = t$	$x = \text{ch}(t) \quad ; \quad dx = \text{sh}(t) dt$

Sustituciones en integrales de funciones trigonométricas circulares

Si es impar en SEN X	$\text{cos } x = t$	$x = \text{arccos}(t); dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}; \text{sen}(x) = \sqrt{1-t^2}$
-------------------------	---------------------	---

FUNCIONES RACIONALES

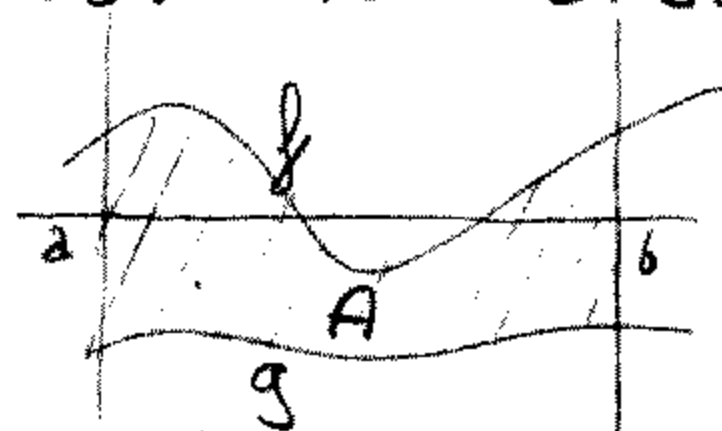
$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{Bx+C}{x^2-bx+c} + \dots$$

Si es impar en COS X	$\text{sen } x = t$	$x = \arcsen(t); dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \cos(x) = \sqrt{1-t^2}$
Si es par en SEN y en COS	$\text{tg } x = t$	$x = \text{arctg}(t); dx = \frac{dt}{1+t^2};$ $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
Si no es ninguno de los casos anteriores: CAMBIO GENERAL	$\text{tg } \frac{x}{2} = t$	$x = 2 \text{arctg}(t); dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \text{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2};$ $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
Sustituciones en integrales de funciones hiperbólicas		
Si es impar en SH X	$\text{ch } x = t$	$x = \text{argch}(t); dx = \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}; \text{sh}(x) = \sqrt{t^2-1}$
Si es impar en CH X	$\text{sh } x = t$	$x = \text{argsh}(t); dx = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}; \text{ch}(x) = \sqrt{1+t^2}$
Si es par en SH y en CH	$\text{th } x = t$	$x = \text{argth}(t); dx = \frac{dt}{1-t^2}; \text{sen}(x) = \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
Si no es ninguno de los casos anteriores: CAMBIO GENERAL	$\text{th } \frac{x}{2} = t$	$x = 2 \text{argth}(t); dx = \frac{2dt}{1-t^2}; \text{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2};$ $\cos(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

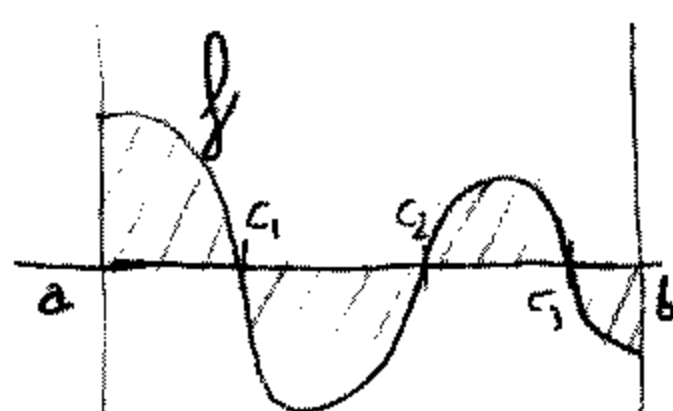
Formula de integración por partes

$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

- Cálculo areas



$A = \int_a^b f - g$



$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f - \int_{c_1}^{c_2} f + \int_{c_2}^{c_3} f - \int_{c_3}^b f$

- Cálculo Volúmenes

$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

- Calc. Sup. Revolución

$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx$

- En polares $r(\varphi)$

$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi) d\varphi$

- Longitud de curvas

- Coord. Cartesianas

$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$

- Coord. Polares

$L = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi$

Varios

• **Funciones Hiperbólicas**

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh^2(x) - \cosh^2(x) = 1$$

$$\operatorname{argtgh}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sinh(x)' = \cosh(x) \quad \cosh(x)' = \sinh(x) \quad \text{¡¡ Ojo Sin Signo !!}$$

• **Binomio de Newton**

$$(a+b)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \dots + \binom{m}{m-2}a^2b^{m-2} + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m$$

• **Ecuaciones de la recta**

m = pendiente ; Por la derivada ó con dos puntos $m = (x_0 - x_1) / (y_0 - y_1)$

(x_0, y_0) = es un punto

Ecuación tangente = $(y - y_0) = m(x - x_0)$

Ecuación tangente = $(y - y_0) = (1/m)(x - x_0)$ *Perpendicular*

• **Combinatoria**

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad \text{Propiedades: } \binom{m}{0} = 1 \text{ y } 0! = 1$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \quad \binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

• **Reglas de los logaritmos (En cualquier base)**

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$\log a \cdot b = \log a + \log b$$

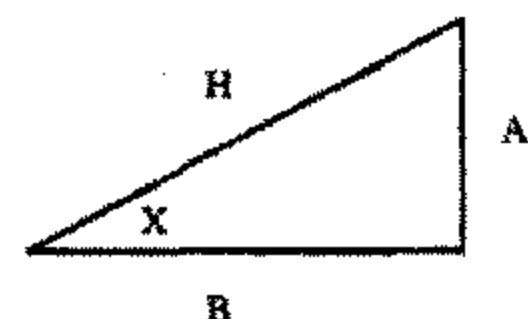
$$\log a/b = \log a - \log b$$

$$\log a^b = b \log a$$

$$\log \sqrt[b]{a} = 1/b \log a$$

• Trigonometría

$\pi = 180^\circ = \pi \text{ Rad}$



$\text{sen } x = \frac{A}{H}$

$\text{cos } x = \frac{B}{H}$

$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \frac{A}{B}$

$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{H}{A}$

$\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x} = \frac{H}{B}$

$\text{cot } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x} = \frac{B}{A}$

	0°	30°	45°	60°	90°
sen x	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos x	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Relaciones ¿estudiarlas ???

Complementaria : $\text{sen}(\pi/2 - x) = \text{cos } x$; $\text{cos}(\pi/2 - x) = \text{sen } x$

Suplementarios : $\text{sen}(\pi - x) = -\text{sen } x$; $\text{cos}(\pi - x) = -\text{cos } x$

Opuestos : $\text{sen } -x = -\text{sen } x$; $\text{cos } -x = \text{cos } x$

Relación fundamental

$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$

Dividiéndola por $\text{sen}^2 x$

$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$

Dividiéndola por $\text{cos}^2 x$

$\text{tg}^2 x + 1 = \text{sec}^2 x$

Transformaciones al ángulo mitad

$\text{sen } 2a = 2 \text{sen } a \cdot \text{cos } a$ $\text{cos } 2a = \text{cos}^2 a - \text{sen}^2 a$ $\text{tg } 2a = \frac{2 \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$

Transformaciones al ángulo doble

$\text{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{cos } x}{2}}$ $\text{cos} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \text{cos } x}{2}}$ $\text{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{cos } x}{1 + \text{cos } x}}$

Transformaciones en suma

$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen } a \text{cos } b \pm \text{sen } b \text{cos } a$ $\text{cos}(a \pm b) = \text{cos } a \text{cos } b \mp \text{sen } a \text{sen } b$

$\text{tg}(a \pm b) = \frac{\text{tg } a \pm \text{tg } b}{1 \mp \text{tg } a \text{tg } b}$

Transformaciones en producto

$\text{sen } a + \text{sen } b = 2 \text{sen} \frac{a+b}{2} \text{cos} \frac{a-b}{2}$ $\text{sen } a - \text{sen } b = 2 \text{cos} \frac{a+b}{2} \text{sen} \frac{a-b}{2}$

$\text{cos } a + \text{cos } b = 2 \text{cos} \frac{a+b}{2} \text{cos} \frac{a-b}{2}$ $\text{cos } a - \text{cos } b = -2 \text{sen} \frac{a+b}{2} \text{sen} \frac{a-b}{2}$