Tema 1: Topologia de $\mathbb{R}^n$

- Notacions bàsiques:

  Punts de $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$

  - Producte escalar estàndar: $\boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$

  - Norma Euclidiana: $\boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}}$

  - Distància Euclidiana: $\boxed{d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}}$

- Una successió en $\mathbb{R}^n$ és convergent $\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} (x_i)_k = a_i \quad \forall k = 1..n$

Tema 2: Límits i continuitat

- $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$; $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

  $\lim_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} f_i(x) = b_i \quad \forall i = 1..n$

- Límits direccionals.

  Podem estudiar el límit de f en apropar-nos a "a" segons el vector "$\vec{v}$":

  $$\lim_{t\to 0_+} f(a + t\vec{v})$$

- $\exists \lim_{x\to a} f(x) = k \; \begin{smallmatrix}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{smallmatrix}$ límits direccionals $= k$

  segons una corba

- Límit segons una corba parametritzada.

  $\lim_{t\to 0_+} \gamma(t) = a \Rightarrow \lim_{t\to 0_+} f(\gamma(t))$

- Límits reiterats:

  (si existeixen)

  $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \; \begin{smallmatrix}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{smallmatrix} \; \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = L$

- $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ és contínua si ho són totes les f_i.

- El teorema de Bolzano es pot aplicar a $a \in A \xrightarrow{f} b \in B$ si A es arc-conex (existeix un camí que uneix a_1, a_2 $\forall a_1, a_2 \in A$)

TEMA 3: DERIVACIÓ

- f és diferenciable, si existeix una aplicació linal T_a tq.:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = T_a = f'(a) \text{ o } Df(a)$$
- $f(a) + Df(a)(x-a)$ s'anomena aproximació linial de f en a.
- $f: A \to \mathbb{R}^n$ és diferenciable en $a \Rightarrow f$ continua en a.
- f és diferenciable sii ho són les seves funcions components
$$(f)' = Df = (Df_i)_{1\le i\le n}$$
- Derivades direccionals:
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\vec{u}) - f(a)}{t} = f'(a;u) \text{ ó } D_u f(a)$$
Derivada direccional de f segons el vector $\vec{u}$.
- Si f diferenciable en a, $\Rightarrow D_u f(a) = f'(a)\cdot\vec{u}$
- Derivades parcials:
(derivades direccionals segons els vectors de la base canònica)
$$D_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,(a_i+t),\dots,a_m) - f(a_1,\dots,a_m)}{t}$$
- Matriu Jacobiana
$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$
si $n=m$ el determinant s'anomena Jacobià de f en a.
- Regla de la cadena
$$D(g\circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))\circ Df(x_0) \quad \Big| \quad J(g\circ f)(x_0) = Jg(f(x_0))\cdot Jf(x_0)$$
- Teorema de Schwarz
les derivades parcials creuades són iguals $D_i D_j f(x_0) = D_j D_i f(x_0)$
- Teorema de la funció inversa
$$Df^{-1} = \frac{1}{Df(f^{-1})} \quad \Big| \quad Jf^{-1} = \frac{1}{Jf(f^{-1})}$$

- **Canvis de coordenades**

canvi variable
=

- Si f és $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ amb $Jf \neq 0$, f és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}$

- Coordenades polars.

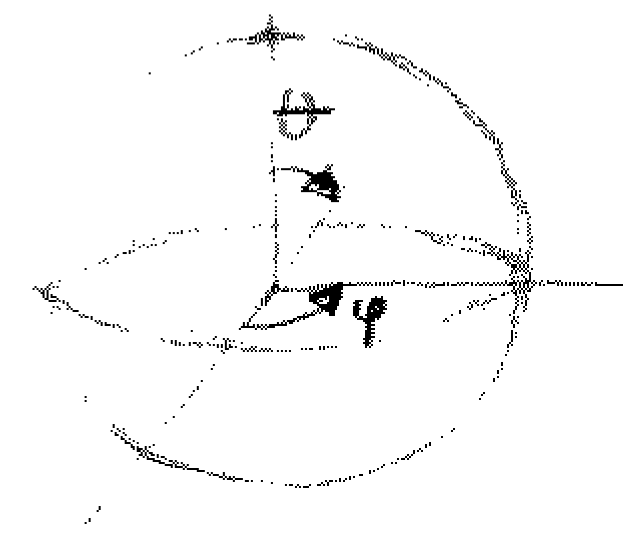
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (x,y) \qquad Jf = r$$

- Coordenades cil·líndriques.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = \rho \end{cases} \qquad Jf = \rho$$

- Coordenades esfèriques

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad Jf = r^2\sin\theta$$



- **Teorema de la funció implícita**

$$\boxed{\begin{gathered} Df(x) = \frac{-D_1F(x,f(x))}{D_2F(x,f(x))} \\ F(x,y) \overset{!!}{=} 0 \iff y = f(x) \end{gathered}}$$

$y = f(x)$: Funció definida implícitament per l'equació $F(x,y)$

- La derivada de f es calcula aplicant la regla de la cadena a l'equació $F(x, f(x))$.

$$\boxed{\left.\frac{\partial F^k}{\partial x^i}\right|_{(x,f(x))} + \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial F^k}{\partial y^j}\right|_{(x,f(x))} \cdot \left.\frac{\partial f^i}{\partial x^i}\right|_x \overset{!!}{=} 0}$$

E.: $f(x,y,z) = f(x,y,z(x,y))$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \overset{!!}{=} 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z}$$

TEMA 4: APLICACIONS GEOMÈTRIQUES DE LA DERIVACIÓ

- **Gradient**: Vector tangent a una funció f en un punt p.

$$\boxed{\operatorname{grad} f(p) = \vec{\nabla} f(p) = \sum_{j=1}^{n} D_j f e_j}$$

El màxim valor de f és $\|\operatorname{grad}(p)\|$ i s'assoleix en la direcció donada pel vector gradient.

TEMA 5: ESTUDI LOCAL DE FUNCIONS

- $$\boxed{\begin{aligned} PT_k(f, p, \vec{v}) &= f(p) + D_v f(p) + \dots + \frac{D_v^k f(p)}{k!} \\ R_k(f, p, \vec{v}) &= \frac{D_v^{k+1} f(\hat{p})}{(k+1)!} \end{aligned}}$$

- Matriu hessiana

$$Hf(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n x^n}(x_0) \end{pmatrix}$$

(Matriu simètrica $n \times n$)

$$\boxed{H(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\, v^i v^j = D_v^2 f(x_0)}$$

- Si es definida positiva $\Rightarrow f$ té un mínim local extricte en x_0
- " " negativa $\Rightarrow$ " " màxim "
- " " indefinida $\Rightarrow f$ té un punt sella en x_0 (p.c q no es ext. rel)

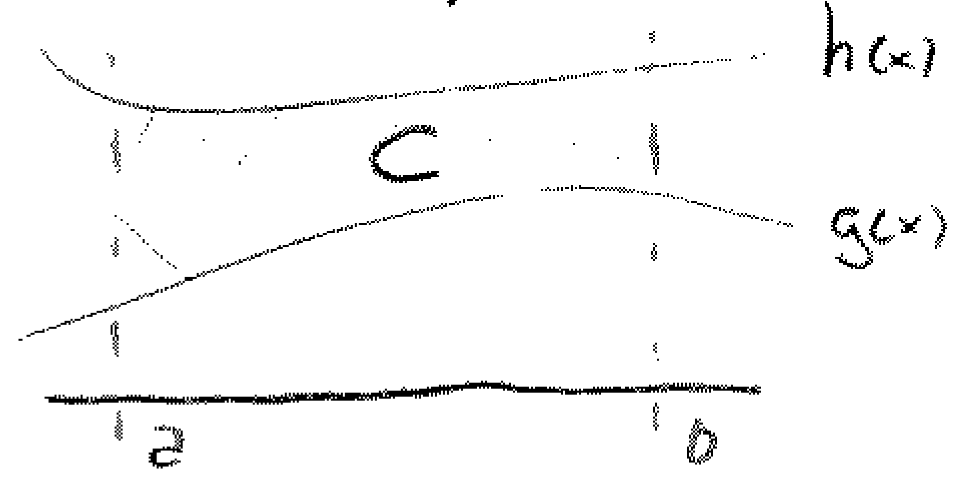
- Tb podem trobar els punts crítics de f pel mètode dels <u>multiplicador de Lagrange.</u>

$$\begin{cases} G^1(x) = 0 \\ \vdots \\ G^p(x) = 0 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x^1} = \lambda_1 \frac{\partial G^1(x)}{\partial x^1} + \dots + \lambda_p \frac{\partial G^p(x)}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x^n} = \lambda_1 \frac{\partial G^1(x)}{\partial x^n} + \dots + \lambda_p \frac{\partial G^p(x)}{\partial x^n} \end{cases}$$

TEMA 6: INTEGRACIÓ

1 ∘ $\displaystyle\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A dx\left(\int_B dy\, f(x,y)\right) = \int_B dy\left(\int_A dx\, f(x,y)\right)$

∘ $$\boxed{\int_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\left(\int_{g(x)}^{h(x)} dy\, f(x,y)\right)}$$



∘ Teorema del canvi de variable

$$\boxed{\int_V f = \int_U (f\circ\varphi)\,|\det J(\varphi)|} =$$

$$= \int_{V=\varphi(U)} f(y^1,\dots,y^n)\,dy^1\dots dy^n = \int_{\varphi^{-1}(V)=U} f(\varphi^1(x),\dots,y^n(x))\left|\det\frac{\partial(y^1,\dots,y^n)}{\partial(x^1,\dots,x^n)}\right| dx^1\dots dx^n$$

∘ Integració en coordenades polars

$$\boxed{\int_{\varphi(U)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_U f(r\cos\phi, r\sin\phi)\,r\,dr\,d\phi}$$

∘ Integració en coordenades cil·líndriques

$$\boxed{\int_{\varphi(U)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_U f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)\,\rho\,d\rho\,d\phi\,dz}$$

∘ Integració en coordenades esfèriques

$$\boxed{\int_{\varphi(U)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_U f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin^2\theta\,dr\,d\phi\,d\theta}$$

∘ Integrals depenents de paràmetres

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

$$\boxed{F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} D_2 f(x,y)\,dx + f(\beta(y),y)\,\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\,\alpha'(y)}$$

TEMA 7: INTEGRALS DE LÍNIA I DE SUPERFÍCIE

- **Integrals de línia de funcions escalars**

longitud $(\sigma) = \int_I \|\sigma'(s)\| ds$ ($\sigma : I \to \mathbb{R}^n$ camí definit en l'interval I)

- Integral de línia de f al llarg de la corba parametritzada σ:

$$\boxed{\int_\sigma f\, dl := \int_I f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| ds}$$

- Si $f = 1 \Rightarrow$ Definició longitud σ
- Si la corba es tancada escribim $\oint_c f\, dl$

- **Integrals de línia de funcions vectorials**

$$\boxed{\int_\sigma \vec{f}\, \vec{dl} := \int_I \vec{f}(\sigma(s)) \cdot \vec{\sigma}'(s)\, ds}$$ "Circulació"

- Vector tangent unitari $\vec{t} = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|}$

Component tangencial $\vec{f} = f_t(\sigma(s)) = f(\sigma(s)) \cdot t(s)$

$$\boxed{\int_\sigma \vec{f} \cdot \vec{dl} = \int_\sigma f_t\, dl}$$

- Si C es una corba orientada i C° es la mateixa corba amb l'orientació oposada $\Rightarrow \int_{C°} \vec{f}\, \vec{dl} = -\int_C \vec{f}\, \vec{dl}$

- Camps conservatius

f conservatiu sii $\exists \phi$ (camp escalar) / $\vec{f} = \text{grad}\, \phi$

- **Integrals de superfície de funcions escalars**

$$\boxed{\int_\sigma f\, dS := \int_U f(\sigma(u_1, u_2)) \|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|\, du_1\, du_2}$$ $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ vectors tangents

- Area de M $\int_M dS$

- **Integrals de superfície de funcions vectorials en $\mathbb{R}^3$**

$$\boxed{\int_\sigma \vec{f} \cdot \vec{dS} := \int_U \vec{f}(\sigma(u_1, u_2)) \cdot \vec{T}_1 \times \vec{T}_2\, du_1\, du_2 = \int_U \det(\vec{f} \circ \sigma, \vec{T}_1, \vec{T}_2)}$$ "flux"

- Vector normal unitari $\vec{n} = \frac{\vec{T}_1 \times \vec{T}_2}{\|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|}$

Component normal $\vec{f} = f_n(\sigma(u_1, u_2)) = \vec{f}(\sigma(u_1, u_2)) \cdot n(u_1, u_2)$

$$\boxed{\int_\sigma \vec{f} \cdot \vec{dS} = \int_\sigma f_n \cdot dS}$$

TEMA 8: TEOREMES INTEGRALS DE L'ANÀLISI VECTORIAL

- Operadors diferencials sobre camps de $\mathbb{R}^3$ $\quad \mathcal{E} \xrightarrow{grad} V \xrightarrow{rot} V \xrightarrow{div} \mathcal{E}$

$$\boxed{\begin{array}{l} * \text{Gradient: } \operatorname{grad} f = \nabla f := \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} \\ * \text{Rotacional: } \operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} := \begin{pmatrix} \partial \vec{f}_3/\partial y - \partial \vec{f}_2/\partial z \\ \partial \vec{f}_1/\partial z - \partial \vec{f}_3/\partial x \\ \partial \vec{f}_2/\partial x - \partial \vec{f}_1/\partial y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{vmatrix} \\ * \text{Divergència: } \operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} := \dfrac{\partial \vec{f}_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \vec{f}_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \vec{f}_3}{\partial z} \end{array}}$$

(Els tres són operadors linials) $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g)$

- $\vec{f}$ és irrotacional si $\operatorname{rot} f = 0$
- " " sense divergència " $\operatorname{div} f = 0$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ $\quad$ | $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$

  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$ $\quad$ | $\operatorname{rot}(f\vec{h}) = f \operatorname{rot} \vec{h} + \operatorname{grad} f \times \vec{h}$

  $\operatorname{div}(f\vec{h}) = f \operatorname{div} \vec{h} + \operatorname{grad} f \cdot \vec{h}$

$\boxed{* \text{Laplacià: } \Delta f = \nabla^2 f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)}$ $\quad \Delta f = 0 \Rightarrow f$ "harmònica"

- Teorema Stokes

$$\boxed{\int_S \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{f}}\, \overrightarrow{dS} = \int_{\partial S} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dl}}$$

∂S vora de S amb l'orientació induida de S (regla cargol)

- Teorema de Gauss

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \vec{f}\, dV = \int_{\partial V} \vec{f}\, \overrightarrow{dS}}$$

∂V vora de V amb l'orientació induida de S (normal cap a fora)

- Teorema fonamental del Càlcul

$$\boxed{\int_C \operatorname{grad} f \cdot dl = \int_{\partial C} df} = f(p_1) - f(p_0) \quad , \quad \partial C = \{p_0, p_1\}$$

- $\vec{F}$ és un <u>camp conservatiu</u> si f és un <u>potencial escalar</u> per a $\vec{F}$ $\boxed{\vec{F} = \text{grad} f}$

- equival:
  - $*$ $\vec{F}$ té un potencial escalar ($\vec{F}$ conservatiu)
  - $*$ $\int_C \vec{F} \cdot dL$ només depèn de p_0, p_1 $C = \{p_0, p_1\}$
  - $*$ C (corba tancada) $\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$

  $\Rightarrow$ $\text{rot } \vec{F} = 0$ ($\vec{F}$ és irrotacional)

  $\Leftarrow$ no sempre

- Si $\vec{F}: U \to \mathbb{R}^3$ (U simplement conex) $\boxed{\text{rot } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} \text{ té pot. escalar}}$

- $\vec{G}$ es solenoidal si $\vec{F}$ es un <u>potencial vectorial</u> per a $\vec{G}$ $\boxed{\vec{G} = \text{rot } \vec{F}}$

- equival:
  - $*$ $\vec{G}$ té un potencial vectorial
  - $*$ $\int_S \vec{G} \cdot d\vec{S}$ depen de ∂S (contorn), no de S
  - $*$ (S tancada) $\Rightarrow \oint_S \vec{G}\, d\vec{S} = 0$

  $\Rightarrow \text{div } \vec{G} = 0$ ($\vec{G}$ sense diverg.)

- Si $\vec{F}$ és un potencial vectorial, tb ho és $\vec{F} + \text{grad} f$

en $\mathbb{R}^2$

- <u>Teorema de Green</u> (T.a Stokes en $\mathbb{R}^2$)

$$\boxed{\int_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial M} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_{\partial M} f_1\, dx + f_2\, dy}$$

$\partial M \Rightarrow$ vora de M amb orientació induïda (la part de dintre a l'esquerra)

- Calcul àrees mitjançant Teorema de Green

Ex.: $f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\int_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_M \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dx\, dy = \boxed{\int_M dx\,dy = \int_{\partial M} (-y\,dx + x\,dy)}$$

- $\vec{F}$ es conservatiu $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial y}}$

  $\Leftarrow$ en alguns casos

- <u>Teorema de la divergència en el pla</u>

$$\boxed{\int_M \text{div } \vec{f}\, dx\, dy = \int_{\partial M} f_n\, dL}$$

$f_n = \vec{f} \cdot \vec{n}$ component normal de $\vec{f}$ al llarg vora ∂M de M orientada cap a fora

$\int_{\partial M} f_n\, dL =$ "flux de $\vec{f}$ a través de ∂M"