T1. EL CUERPO DE LOS Nº COMPLEJOS

Dado un conjunto $\{A\}$, con una operación interna $\{*\}$ $(A,*)$ será:

- Prop. asociativa $\{(a*b)*c = a*(b*c)\}$
- Elem. neutro $\{e \in A ;\ e*a = a*e = a\}$
- Elem. simétrico $\{\forall a \in A ;\ a*a' = a'*a = e\}$
- Prop. conmutativa $\{a*b = b*a\}$

Semigrupo
Monoide
Grupo
Grupo conmutati
(Abeliano)

Dado un conjunto con dos operaciones internas $(A,+,\circ)$ será:

- $(A,+)$ es Grupo Conmutativo
- $(A,\circ)$ es Semigrupo
- Prop. Distributiva $\{a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c\}$
- Si $(A,\bullet)$ tiene Elem. neutro
- Si $(A,\circ)$ tiene Prop. Conmutativa
- Si $\forall a - \{e\} \in A$ ' $\exists$ a^{-1}

Anillo
Anillo Unitario
Anillo Conmutativ
CUERPO

NOTACIÓN

$z = a + bi$
$= (a,b)$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (Módulo)
$\arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$ (Argumento)

$$z = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\sin\alpha \end{cases}$$

Propiedades: $r_\alpha \cdot s_\beta = rs_{\alpha+\beta}$; $\frac{r_\alpha}{s_\beta} = r/s_{\,\alpha-\beta}$

$z + \bar{z} = 2Re(z)$; $z - \bar{z} = 2\,Im(z)$; $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$$\boxed{e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b)} \Rightarrow e^{ix} = \cos x + i\sin x = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!}$$

Prop : $|e^z| = e^{Re(z)}$ $\quad \boxed{Arg(e^z) = Im(z)} \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{e^a\sin b}{\cancel{e^a}\cos b} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} b) = b$

Teorema Fundamental del Álgebra : $\forall$ polinomio a coef. en los $\mathbb{C}$ descompone en producto de factores de grado 1.

Teorema del resto : $[(x-\alpha) \mid a(x)] \Leftrightarrow a(\alpha) = 0$

* Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz de $a(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces $\bar{\alpha}$ tb lo es.

* Las raíces $p \in \mathbb{R}$ de $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, cumplen : $(p \mid a_n)$

$a(x) = q(x)\,p(x) + r(x)$ $\qquad \begin{array}{l|l} a(x) & p(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$

$a(x) = q(x)(x^2+x-2) + (ax+b)$

T2. ESPACIOS VECTORIALES

$$E \ K\text{-ev} \iff \left|\begin{array}{l} \overset{\text{Op. Interna}}{} * (E,+) \quad \text{Grupo conmutativo} \\ * (E+E) \longrightarrow E \ : (u,v) \longmapsto u+v \in E \\ \overset{\text{Op. Externa}}{} * (K,E) \longrightarrow E \\ \quad (\lambda, u) \longmapsto \lambda u \in E \ \text{cumpliendo} \end{array}\right. \left\langle \begin{array}{l} \text{I/ } (\alpha\beta)v = \alpha(\beta u) \\ \text{II/ } (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u \\ \text{III/ } \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \\ \text{IV/ } 1 \circ u = u \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \alpha,\beta \in K \\ u,v \in E \end{array}\right.$$

- Elementos K → "Escalares"
- E → "Vectores"

- Dependencia/Independencia lineal

- $\boxed{w \in E}$ es comb. lin de $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \in E \iff \exists \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tq $w = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$
- $\boxed{u_1, u_2, \ldots, u_n}$ son lin. ind $\iff \exists \lambda_i \overset{\in K}{=} 0$ tq $\boxed{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0}$ sino son lin.dep
- $\mathcal{B} \in E$ es libre $\iff \forall \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset \mathcal{B}$; $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ son lin.ind.

- Bases

- $S \subset E$ es Sistema de Generadores si $\left\{\begin{array}{l} \forall u \in E \ ; \forall \lambda_i \in K \\ \forall u_1, u_2, \ldots, u_n \in S \end{array}\right\}$ tq $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$
- $\mathcal{B} \subset E$ es Base de $E \iff \mathcal{B}$ es un Sist. Gen, y $\mathcal{B}$ es libre.

Notación
$u = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)_{\mathcal{B}}$

Teorema de Steinitz :

E K-e.v con $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de E y $\{v_1, v_2, \ldots v_m\}$ l.ind.

$\Rightarrow \boxed{m \leq n}$: v_i puede ser ampliado a una base con $(n-m)$ vectores adecuados de u

- Si $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$, $\{v_1, v_2, \ldots v_m\}$ son dos Bases de $E \Rightarrow m = n$

- Cambio de Base

- Si $u = \{(x, y, z)\}_{\{e_i\}}$ $\qquad v = \{(\underset{v_1}{\lambda}, \underset{v_2}{\alpha}, \underset{v_3}{\beta})\} = (\overbrace{x+y+z}^{=\langle(1,2,3)\rangle_{e_1}}, \overbrace{2x+2y+2z}^{e_2}, \overbrace{3x+3y+3z}^{e_3})$

$$A \xrightarrow[\{v_i\}]{\{e_i\}} \begin{array}{c|ccc|} & & & \\ v_1 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 2 & 2 & 2 \\ v_3 & 3 & 3 & 3 \\ & e_1 & e_2 & e_3 \end{array}$$

Matriz de cambio de Base $\{v_i\}$ a $\{e_i\}$

$$\boxed{A^{-1} \xrightarrow[\{v_i\}]{\{e_i\}} \left(\quad \right)}$$

Cambio de $\{e_i\}$ a $\{v_i\}$

- Subespacios Vectoriales

- $F \subset E$; E k-e.v , $\boxed{F \text{ es } K\text{-s.v}}$ de E si

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{I/ } \forall u, v \in F \longrightarrow u+v \in F \\ \text{II/ } \forall u \in F ; \forall \alpha \in k \rightarrow \alpha u \in F \end{array}} \Bigg\} \begin{array}{l} \forall u, v \in F \\ \forall \alpha, \beta \in k \end{array} \Bigg| \ \alpha u + \beta v \in F$$

- Si $\dim E < +\infty \Rightarrow \dim_K F \leq \dim_K E$; $\dim_K F = \dim_K E \iff E = F$

- OPERACIONES

$$\begin{tikzcd} & \boxed{F \cup G} \arrow[r, "s.v"] & \overset{s.v}{F+G} \supset \overset{\cancel{s.v}}{F \cup G} \\ F \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & & G \arrow[ul, phantom, "\subset" sloped] \\ & F \cap G \arrow[ul, phantom, "\subset" sloped] \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & \end{tikzcd}$$

FÓRMULA DE GRASSMAN

$$\boxed{\dim_K F + \dim_K G = \dim_K (F \cap G) + \dim_K (F+G)}$$

- Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ s.gen U ; $\{v_1, v_2\}$ s.gen V
  $\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2\}$ s.gen $(U+V)$
- SUMA DIRECTA $\boxed{F \oplus G \iff F \cap G = 0}$ $\Rightarrow \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$
- Pasos busqueda s.gen & dim F, G, F∩G, F+G
  - I/ s.gen de $F = \{u_1, u_2 \ldots\}$, $G = \{v_1, v_2 \ldots\}$
  - II/ $A = \left(\underset{u_1}{\uparrow} \ \underset{u_2}{\uparrow} \ldots \underset{v_1}{\uparrow} \ \underset{v_2}{\uparrow} \right)$
  - III/ Manipulación por filas
  - IV/ dim F ; dim G , dim F+G
  - V/ Ecuaciones F∩G

$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots$

$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \Rightarrow$ s.gen F∩G

T3. APLICACIONES LINEALES

- Dados E, F k-e.v se llama **APLICACIÓN LINEAL** a toda aplicación

$$f : E \longrightarrow F \quad \rightarrow L_K(E,F)$$
$$u \longmapsto f(u) \in F$$

- Cumpliendo :

$$\boxed{\begin{array}{ll} I) & f(u+v) = f(u) + f(v) \\ II) & f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{array}} \quad \begin{array}{l} \forall u, v \in E \\ \forall u \in E \,, \forall \alpha \in K \end{array}$$

- Notación : $f(E) \rightarrow$ "$Im\, f$" ; $f^{-1}(0) \rightarrow$ "$Nuc\, f$" $\rightarrow f(x)=0$

- $L_K(E,F)$ tiene extructura de K-e.v :

  * $(L_K(E,F),+) \rightarrow$ Grupo Conmutativo $\leftarrow$ P. Asociativa / P. Conmutativa / E. Neutro / E. Simétrico

  * Op. Interna $I)\ (f+g)_{(u+v)} = \underbrace{(f+g)_{(u)} + (f+g)_{(v)}}$ $= f(u+v) + g(u+v) = f(u) + g(u) + f(v) + g(v)$

    $II)\ (f+g)_{(\alpha u)} = \alpha (f+g)_{(u)}$

  * Op. Externa $(\lambda f)_{(u)} = \lambda f(u) \leftarrow$ I/ II/ III/ IV/

- Matriz asociada a una aplicación lineal

Dados E, F K-e.v ; $B = \{u_i\}$ (base E), $\{w_i\}$ (elementos de F)

$$\boxed{\exists \text{ una } \underline{\underline{\text{única}}}\ L_K(E,F) \text{ "}f\text{"},\ tq\ f(u_i) = w_i}$$

- $B_F = \{v_j\}$ base F : $w_1 \in F \rightarrow w_1 = \alpha_1^1 v_1 + \dots + \alpha_1^m v_m = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^m)_{B_F}$

$$f \xrightarrow[\{v_j\}]{\{u_i\}} A \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \\ \alpha_1^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \\ f(u_1) \quad f(u_n) \end{array}$$

si $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\{u_i\}}$

$$f(u) = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\{u_i\}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_{\{v_j\}}$$

* Cambio de Base

$\{u_i\}$	Base	de E
$\{v_i\}$	"	" F
$\{e_i\}$	"	" G

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \\ u \arrow[r, mapsto] & f(u) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "g"] & G \\ f(u) \arrow[r, mapsto] & g(f(u)) \end{tikzcd}$$

$$f \xleftrightarrow[\{v_i\}]{\{u_i\}} A \qquad g \xleftrightarrow[\{e_i\}]{\{v_i\}} B$$

$$\boxed{g \cdot f \xleftrightarrow[\{e_i\}]{\{u_i\}} B \cdot A}$$

* Nucleo e Imagen de una aplicación lineal

$$\boxed{\dim E = \dim(Nuc\, f) + \dim(Im\, f)}$$

$$Im\, f = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad Nuc\, f \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{\alpha} \\ \lambda \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* Vocabulario $f \in L_K(E,F)$

		$\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$
- Si E=F, f es <u>ENDOmorfismo</u>		
- Si f es injectiva $[f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y,\ Nuc\, f = 0]$	f es <u>MONOmorfismo</u>	l. ind
- " " exaustiva [$\dim(Im\, f) = \dim F$]	f es <u>EPImorfismo</u>	s.g de F
- " " EPI y MONO	f es <u>ISOmorfismo</u>	base de F
- " " ENDO y ISO	f es <u>AUTOmorfismo</u>	

* Operaciones, observaciones

$$f \xleftrightarrow[\{v_i\}]{\{u_i\}} A \,,\quad g \xleftrightarrow[\{v_i\}]{\{u_i\}} B \qquad \boxed{f+g \xleftrightarrow[\{v_i\}]{\{u_i\}} A+B} \qquad \boxed{\lambda f \xleftrightarrow[\{v_i\}]{\{u_i\}} \lambda A}$$

$\{u_i\}$ base E
$\{v_i\}$ base F

$$\boxed{\dim L_K(E,F) = \dim E \cdot \dim F}$$

T4. DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS

- Vectores y Valores Propios
  - v es VEP de f si $\exists\ \lambda \in K$ tq $\boxed{f(v) = \lambda v}$
  - λ es VAP de f si $\exists\ v \in E$ tq $f(v) = \lambda v$

$f \in End_K(E)$

$\boxed{\lambda \text{ VAP de } f \Leftrightarrow Nuc\ (f - \lambda Id) \neq 0} \Leftrightarrow det\ (f - \lambda Id) = 0$

- Polinomio característico

$\boxed{C_A(x) = det\ (A - x Id)}$

$\boxed{det\ (A \cdot B) = det A \cdot det B \\ det\ P^{-1} = \frac{1}{det P}}$ * "Recordatorio"

- Si $B = P^{-1}AP \Rightarrow \boxed{C_B(x) = C_A(x)} < \begin{matrix} det A = det B \\ tr A = tr B \end{matrix}$
- $\boxed{\text{VAP's de } f \equiv \text{Soluciones } C_f(x) = 0}$
  - $\boxed{\text{• Los VEP's de un VAP se obtienen del } \boxed{Nuc\ (f - \lambda Id) = 0}}$

- Diagonalización

$C_f(x) = (x - \lambda Id)^{n_1} p(x)\ ;\ p(\lambda) \neq 0$ ← n_1 : multiplicidad algebraica de λ

$m_1 = dim\ (Nuc\ (f - \lambda Id))$ → m_1 : " " geométrica de λ

* Teorema de diagonalización

f diagonalizable $\Leftrightarrow$ C_f descompone en factores de gra. 1, y para $\forall$ VAP de f, $\boxed{n = m}$ $\Leftrightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$

* Los VEP's de VAP's distintos son l. ind.

* Podemos formar una base de E con los VEP's de todos los VAP's

- Matrices diagonales por bloques

* TEOREMA DE CAYLEY - HAMILTON $p(f) \xleftrightarrow{1vi1} p(A)$

Dado $p(x) \in K_{[x]}$: $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ podemos realizar :

I/ Polinomio de Endomorfismos : $p(f) = a_0 Id + a_1 f + \ldots + a_n f^n$

II/ Polinomio de Matrices : $p(A) = a_0 Id + a_1 A + \ldots + a_n A^n$

* $p(x) \in K_{[x]}$ es un Polinomio Anulador de $f \Leftrightarrow \boxed{p(f) = 0}$

* Polinomio Mínimo

$m_f(x)$, único polinomio mónico, anulador de $f\ [p(f) = 0]$; $\boxed{m_f(x) \mid C_f(x)}$

- Para encontrarlo : $\boxed{\underset{\boxed{C_f(x)}}{m_f(x)} = (x - \lambda Id)^n}$ tq $\boxed{(f - \lambda Id)^n = 0}$

* Subespacios Invariantes

$f \in End(E)$; F es s.Invariante de $f \Leftrightarrow \boxed{f(F) \subset F}$

* $\boxed{m_{f'}(x) \mid m_f(x)}$

- Si F, G, son s.inv. de f y son primos entre si $\Rightarrow \boxed{F \cap G = 0}$
- Si $m_f(x) = p(x) \cdot q(x)$; $p(x), g(x)$ primos entre si $\Rightarrow \boxed{E = Nuc(p(f)) \oplus Nuc\ (q(f))}$
- La matriz asociada a una base formada por la unión de bases de s.inv es una matriz diagonal por bloques

* Aplicaciones

- $A^{-1} \rightarrow$ T. Cayley-H
- $A^n \rightarrow$ T. Cayley-H ó $A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \lambda_2^n & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$
- $q(f) = P \cdot \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & & \\ & q(\lambda_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$

→

T·5. ESPACIOS EUCLIDEOS Y UNITARIOS

- Producto Escalar

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r] & K \\ (u,v) \arrow[r, mapsto] & \langle u, v \rangle \end{tikzcd}$$

* Es una aplicación : $\langle \ , \ \rangle$ tq

* Propiedades :

$\boxed{K = \mathbb{R}}$
- Forma bilinial → $\langle \alpha u, \beta v \rangle = \alpha\beta \langle u, v \rangle$
- Forma simétrica → $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- Forma definida positiva → $\langle u, u \rangle \geq 0$

$\boxed{K = \mathbb{C}}$
- Forma sesquilineal → $\langle \alpha u, \beta v \rangle = \alpha \overline{\beta} \langle u, v \rangle$
- Forma hermítica → $\overline{\langle u, v \rangle} = \langle v, u \rangle$
- Forma definida positiva → $\langle u, u \rangle \geq 0$

* Forma Matricial.

$$\boxed{\langle u, v \rangle = (u_1, u_2, \dots, u_n)\, B \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \boxed{u B v^t}}$$

En el caso $K = \mathbb{C}$ $\langle u, v \rangle = u B \overline{v}^t$

Donde B, es la matriz asociada a un prod. escalar en cierta base.

- Norma $\boxed{\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}}$ $\boxed{d(u,v) = \|u - v\|}$ distancia de u a v

Propiedades

- Desigualdad de CAUCHY-SCHARZ $\boxed{|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle}$ $\boxed{|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|}$

  $\boxed{\cos\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}}$ α : angulo entre u y v.

- Ley del paralelogramo $\boxed{\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)}$
- Teorema de PITAGORAS $\boxed{\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2}$

- Ortogonalidad

$\forall u, v \in E$ son ortogonales $\Leftrightarrow$ $\boxed{\langle u, v \rangle = 0}$

- Una base de E es ortogonal si sus vectores son ortogonales dos a dos.
- " " ortonormal si es ortogonal, y sus vectores son unitarios.
- Método de GRAM-SCHMIDT (a partir base de E, obtener base ortogonal/ortonormal)

  * $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base E; $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ base ortonormal; $\{u_1', u_2', \dots, u_n'\}$ base ortogonal

  base ortogonal

  $$u_1' = e_1$$
  $$u_{r+1}' = e_{r+1} - \lambda_1 u_1' - \dots - \lambda_r u_r'$$
  $$\lambda_i = \frac{\langle e_{r+1}, u_i' \rangle}{\langle u_i', u_i' \rangle}$$

  base ortonormal

  $$u_i = \frac{u_i'}{\|u_i'\|}$$

- Subespacio ortogonal

$S \subset E$; $S^\perp = \{ u \cdot v = 0 ; u \in E, \forall v \in S^\perp \}$ $\boxed{S \cap S^\perp = \{0\}}$ $\boxed{S = S^{\perp\perp}}$

$\boxed{E = F \oplus F^\perp}$ $\boxed{\dim E = \dim F + \dim F^\perp}$ $\forall v \in E \rightarrow \boxed{v = \underset{F}{\underset{\cap}{v_1}} + \underset{F^\perp}{\underset{\cap}{v_2}}}$ (desc. única)

- $\boxed{v_1 = \operatorname{proj}(v, F) = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} \cdot w}$ cuando $\dim \langle \overset{F}{\downarrow}{w} \rangle = 1$

  sino: $\begin{pmatrix} \overbrace{w_1' \ \ w_2'}^{F} & \overbrace{\ \cdots \ }^{F^\perp} \\ \vdots \ \ \vdots & \vdots \\ w_1^n \ \ w_2^n & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \overset{v}{\downarrow}\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

  $\operatorname{proj}(v, F) = \alpha (w_1', \dots, w_1^n) + \beta (w_2', \dots w_2^n$

  $\operatorname{proj}(v, F^\perp) = \gamma \langle F_1^\perp \rangle + \delta \langle F_2^\perp \rangle =$
  $= v - \operatorname{proj}(v, F)$

- $\boxed{v_2 = \operatorname{proj}(v, F^\perp) = v_1 - \operatorname{proj}(v, F)}$
- $\boxed{\cos\alpha = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}}$ $\alpha = \operatorname{ang}(v, F)$